

AC 15 85

Esta noche en nuestro programa de Matemáticas Especiales nos acompañan los profesores Teresa Ulecia y Miguel Delgado. Muy buenas noches a los dos. Buenas noches, Isabel.

Buenas noches, Isabel. Vamos a ver los temas que van del 24 al 30 y vamos a comenzar por este tema 24. ¿Qué estudiamos en este primer tema de la noche? Bueno, pues en este primer tema comenzamos el estudio del cálculo diferencial, que es una parte muy importante del llamado análisis matemático.

Se estudia el concepto de la derivada de una función en un punto y se establecen las primeras propiedades y las reglas de derivación. ¿Cuándo y por qué se empezó con el estudio de la derivada? Ya a finales del siglo XVI, los viejos problemas de movimiento y determinación de áreas y volúmenes impulsaron los procedimientos de cálculo. Fue Newton y Leibniz quienes en el siglo XVII dieron una primera formulación, aunque la formulación actual la debemos a Cauchy.

¿Entonces es esta la definición de Cauchy la que se estudia actualmente? Sí, así es. Empieza el tema con dicha definición de derivada de una función en un punto, como el límite cuando el incremento tiende a cero del cociente incremental. Es decir, el límite del cociente o la razón entre el aumento de la variable dependiente, lo que llamamos f de X , y el incremento de la variable independiente, la X , cuando este incremento tiende a cero.

Tiene entonces distintas interpretaciones. Sí, claro. Si consideramos la variable dependiente como el espacio y la independiente el tiempo, tenemos la velocidad instantánea de un móvil.

Es decir, la derivada del espacio respecto al tiempo en un punto es la velocidad que lleva ese móvil en ese instante y a su vez, si volvemos a derivar, obtenemos la aceleración en ese punto. Otra interpretación, por ejemplo, la geométrica. La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

Es decir, es la derivada de la inclinación, entre comillas, de la recta tangente. Además de la definición y el concepto de la derivada de una función en un punto, ¿qué se estudia en este tema? Como hemos comentado anteriormente, se establecen las primeras reglas de derivación. Partiendo de la propia definición, se demuestra que la suma de dos funciones derivables en un mismo punto es otra función derivable en ese punto y su derivada es igual a la suma de las derivadas de las funciones sumando.

Y análogamente sucede con la resta. En el caso del producto, la derivada del producto de dos funciones derivables en un determinado punto es también derivable y su derivada es igual a una suma cuyo sumando son la derivada de cada una de las funciones en el punto A por el valor de la función en A . ¿Y qué ocurre con el cociente? Si dos funciones F y G son derivables en un punto A y G de A es distinto de cero, entonces la función F partido por G es derivable en A y su derivada se obtiene por una fórmula un poquito más complicada, pero no mucho, que

tienen en la página 484 del libro de teoría. ¿Para la composición de funciones tenemos alguna regla de derivación? Sí, es la llamada regla de la cadena, que nos da la condición suficiente para la derivabilidad de una función compuesta.

Esta regla de la cadena es muy importante, pues se utiliza frecuentemente, como veremos más adelante. Hay algo más que destacar en este tema. En el tema finalizamos con la regla de derivación de la función inversa y el concepto de derivadas sucesivas.

La segunda derivada, que es la derivada de la primera derivada, la tercera derivada, que es la derivada de la segunda, y así sucesivamente. Pues podemos pasar entonces al tema siguiente, el tema 25. Estudio y representación de funciones.

¿Qué es lo importante en este tema? En el tema anterior hemos visto cómo se aplican las derivadas al estudio de las tangentes y al cálculo de la velocidad. Ahora en este tema comprobaremos que son la mejor herramienta para el estudio y representación de las funciones. Por el teorema de Ballestrass, toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado alcanza un máximo y un mínimo absoluto.

Aquí introducimos el concepto de máximo y mínimo relativo o máximo y mínimo local. Y damos un resultado, importante como es, si la función es derivable en un punto y en él alcanza un máximo o un mínimo relativo o local, entonces su derivada debe ser nula. Hay que hacer hincapié que esto supone una condición necesaria, pero no suficiente.

Entonces puede existir una función cuya derivada en un cierto punto sea nula. ¿Y no será este punto donde se alcance ni el máximo ni el mínimo de la función? Desde luego. Por ejemplo, la función f de x igual a x al cubo.

En el punto cero su derivada es nula, pero sin embargo no existe extremo. O la función valor absoluto de x , que en el cero tiene un mínimo pero no es su derivada nula, pues ni siquiera es derivable. Es decir, no existe derivada en el cero.

De estos ejemplos se deduce un método, el máximo y el mínimo de una función continua en un intervalo cerrado y acotado están entre los puntos donde la derivada sea nula, los extremos del intervalo o los puntos donde la función no sea derivable. Es decir, estoy hablando de máximos y mínimos absolutos. ¿Qué más podemos destacar en este tema? A continuación seguimos con el problema del crecimiento de una función y estudiamos dos teoremas muy importantes, el de Rolle y el del valor medio.

De este último se deduce un resultado muy útil. Si una función es derivable en un intervalo abierto y en el cual la derivada primera es mayor que cero, entonces en dicho intervalo la función es creciente. Análogamente, si la derivada primera es menor que cero, la función es decreciente.

Aquí comprobamos otra vez la utilidad de las derivadas para el estudio de las funciones. Y no sólo para la representación gráfica, pues de hecho a continuación nos encontramos con la

famosa regla del hospital, que es practiquísima en el cálculo de límites y establece que si dos funciones tienen por límite cero o infinito, el límite del cociente, en el caso de que exista, es igual al límite de las derivadas. ¿Se puede poner aquí algún ejemplo? Sí, cómo no.

Por ejemplo, si tenemos que calcular el límite cuando x tiende a uno del cociente x a la sexta menos uno partido por x a la décima menos uno. Al sustituir las x por uno resulta una expresión de las llamadas indeterminadas, cero partido por cero. Para deshacer la indeterminación derivamos numerador y denominador y volvemos a sustituir la x por uno.

Obtenemos entonces el número racional seis décimos, es decir, tres quintos, que es el límite buscado. En algunas ocasiones hay que reiterar la regla del hópital para poder llegar al cálculo práctico del límite. Por ejemplo, al calcular el límite de la función racional, $3x$ al cuadrado menos x dividido por $2x$ al cuadrado más $3x$ cuando x tiende a infinito, al aplicar la regla por primera vez se obtiene $6x$ menos uno partido por $4x$ más 3, que cuando x tiende a infinito nos da nuevamente la indeterminación de infinito partido por infinito.

Así, al aplicar nuevamente la regla volvemos a derivar tanto dividendo como divisor y nos resulta que el límite vale tres medios. Hemos acabado ya el estudio de las funciones ¿o todavía queda algún resultado? No queda algo. Con la ayuda de las derivadas podemos seguir estudiando más a fondo las funciones y sus gráficas.

Además de los extremos absolutos, también los extremos relativos que hemos hablado antes, estudiamos la condición ya necesaria y suficiente de dichos conceptos. A continuación se definen las funciones convexas y las funciones cóncavas. Queremos hacer una observación respecto a estos conceptos.

Estos conceptos los autores de matemática no nos ponemos de acuerdo. En el texto base de la asignatura se define la función convexa en un intervalo I como aquella en la que cualquiera que sean los puntos A y B de ese intervalo, la gráfica de F queda por debajo del segmento que une los puntos A , F de A y B , F de B . Para una función cóncava, esto es al revés. Otros autores, en cambio, estas definiciones las denuncian al revés.

Por eso hacemos siempre hincapié en que aunque puedan hacerlo por otros textos, es más conveniente estudiar la asignatura por los textos bases, tanto el de teoría como el de problemas. De cualquier forma, nosotros siempre nos situamos por debajo de la gráfica de la función para saber si es cóncava o es convexa. Pero, o sea, que si la concavidad se estudia por otro libro, ¿puede decir en este otro libro lo contrario? Sí, por supuesto.

Bueno, pues ya saben entonces que es conveniente seguir la asignatura con los textos base. ¿Queda algún concepto que destacar en este tema? Con el estudio de las asíntotas de la gráfica de una función se finaliza el capítulo. Las asíntotas son las rectas a las que se aproxima la gráfica de una función cuando se aleja del origen de coordenadas.

¿Existen distintos tipos de asíntotas? Sí, hay tres. Verticales, horizontales y oblicuas. Estudiamos

primero las verticales.

Son rectas de expresión x igual a a y dicha recta x igual a a es una asíntota vertical de f a la derecha de a cuando el límite lateral de la función al tender x al punto a por la derecha es más o menos infinito. Análogamente sería para las asíntotas a la izquierda. Por ejemplo, la recta x igual a 2 es una recta asíntota vertical tanto por la derecha como por la izquierda para la función x a la cuarta dividido por x menos 2. ¿Cómo son las asíntotas del segundo tipo? Son las horizontales.

Rectas del tipo y igual a b cuando el límite de la función en el más o menos infinito es b . Por ejemplo, la recta y igual a 4 es una recta asíntota horizontal de la función $4x$ al cuadrado dividido por x cuadrado menos 1. Pues el límite de esta función cuando x tiende a más o a menos infinito es 4. Podemos pasar entonces al último tipo de asíntotas de una función. Son las asíntotas oblicuas. La expresión es igual a $ax + b$ siendo a distinto de 0 cuando el límite de la función menos a por x menos b es igual a 0 al tender la x a más o menos infinito.

En este caso a se calcula como el límite del cociente entre la función y x cuando x tiende a infinito o cuando x tiende a menos infinito. La ordenada en el origen de la recta asíntota, es decir, la b es igual al límite en el infinito de la función menos a por x donde a lo hemos calculado previamente. Para verlo un poco más claro se puede poner algún ejemplo.

Un ejemplo de este tipo sería la función igual a x al cuadrado partido por x más 1. Como el límite de f de x partido por x cuando x tiende a infinito es 1 y el de f de x menos x es menos 1 la recta igual a x menos 1 es asíntota oblicua de esta función. ¿Cuál sería la recomendación o el comentario para este tema? Es decir, ¿cómo es la mejor manera de abordarlo? Bueno, la mejor forma de abordar este tema es realizar muchos ejercicios y que se estudien paso a paso cada uno de los conceptos que se calculan. Y sobre todo coger buena práctica en la representación de todo tipo de función polinómica y de funciones racionales es decir, cocientes de polinomios.

Entramos en el tema 26. ¿Qué es lo que nos vamos a encontrar aquí? Aquí nos encontramos por primera vez con un tipo de funciones que no son ni polinomios ni racionales o sea, cocientes de polinomios. Son las llamadas funciones trigonométricas.

Estas funciones con las que estudiamos el tema siguiente y las que estudiamos a continuación exponenciales y logarítmicas forman lo que denominamos las funciones trascendentes y con ellas terminamos el estudio elemental de funciones. ¿De estas funciones qué es lo más importante? De las funciones trigonométricas las principales son la función seno y la función coseno. De ellas hay que conocer que son periódicas, es decir, que se repiten cada un cierto llamado periodo que en este caso es 2π radianes que su recorrido es el intervalo $(-1,1)$, sólo pueden tomar valores entre el $(-1,1)$, que son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$ y hay que conocer también sus gráficas y las derivadas.

La derivada de la función seno es el coseno y la derivada de la función coseno es menos el seno. ¿Además de las funciones seno y coseno se estudian algunas funciones trigonométricas

más? Después de las funciones seno y coseno se estudian la tangente que viene definida por el cociente entre seno y coseno y la cotangente que es el coseno dividido por el seno. Estas también son periódicas, pero en este caso el periodo es π radianes.

Estas funciones no son continuas en algunos puntos, ya que al estar ambas definidas como un cociente, entonces en aquellos lugares donde el denominador se anula no están definidas. Por ejemplo, en el caso de la tangente en coseno de π medios o coseno de 3π medios es 0 y por lo tanto la función tangente no está definida. ¿Cuáles son entonces estos puntos en los que no están definidas las funciones tangente y cotangente? Los puntos que no pertenecen al dominio de la función tangente son los de la forma π medios más $k\pi$, donde k es cualquier número entero.

Y en el caso de la cotangente, pues $k\pi$. ¿Qué más se puede destacar o resaltar de estas funciones? Que son derivables en los puntos que están definidas. Hay que conocer también, manejar bien las gráficas y las respectivas derivadas.

La derivada de la tangente es la secante al cuadrado o bien uno más tangente al cuadrado o bien simplemente uno partido por coseno al cuadrado. La derivada de la cotangente es menos cosecante al cuadrado o bien menos uno más cotangente al cuadrado o bien menos uno partido por seno al cuadrado. Con lo que hemos visto hasta ahora, ¿hemos acabado el tema? No.

Para acabar el tema, se hace una pequeña introducción de las funciones arcocoseno y arcotangente, de las que sobre todo hay que conocer sus derivadas, ya que más adelante en el cálculo integral aparecen a menudo. Pues podemos pasar entonces al tema 27, en el que habéis comentado antes que finaliza el estudio de las funciones elementales. Efectivamente.

Analizamos en primer lugar la función logaritmo neperiano, que debe su nombre al matemático escocés John Nepper. Esta función tiene derivada positiva en todo su dominio, que es cero más infinito. Es una función creciente y por tanto tiene función inversa.

A esta función se le llama la exponencial natural y sus propiedades se deducen de las propiedades de la función logaritmo. ¿Cuáles son las propiedades de la función logaritmo? Una propiedad es que el logaritmo de un producto de números reales es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Otra, que el logaritmo de un cociente es la resta del logaritmo numerador menos el logaritmo del denominador.

Entonces la función logaritmo de alguna manera simplifica el cálculo. Así es, pues convierte productos en sumas y cocientes en restas. Además, y es ya la tercera propiedad, convierte potencias en productos, pues el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

¿Se ve aquí alguna función más? ¿Se ve en este tema alguna función más? A partir de la función logaritmo neperiano y de la exponencial natural, se define el número e y las demás funciones

exponenciales y logaritmos en otras bases. Sea la base siempre un número mayor que 0. ¿Y se acaba el capítulo con estas funciones? No, al final del capítulo se utiliza el número e y la regla del hospital para deshacer algunas indeterminaciones en el cálculo del límite de funciones. Por ejemplo, para resolver las indeterminaciones de tipo infinito elevado a infinito 0 elevado a 0 , infinito elevado a 0 , 1 elevado a infinito, lo que se suele hacer es aplicar logaritmo neperiano, es decir, utilizamos el número e y estas se reducen a una indeterminación de tipo 0 por infinito.

Y estas indeterminadas del tipo 0 por infinito, a su vez, se pueden reducir a uno de los casos, infinito partido por infinito o 0 partido por 0 , que en condiciones bastante generales son resueltas por la regla del hospital. ¿En este tema hay que destacar alguna otra cosa? Bueno, pues aquí lo que hay que destacar es la tabla de derivadas de funciones elementales. Es muy importante aprenderse esta tabla para derivar con soltura, porque más adelante lo vamos a necesitar, y sobre todo para luego aprendernos la tabla de integrales.

Casi inmediatamente, ¿no?, porque es lo que se hace en los temas siguientes. Así es. Ya en el tema 28 se definen primero los conceptos de primitiva e integral indefinida de una función.

Dada una función f , la función primitiva es otra función derivable g cuya derivada es f . Como la derivada de una constante es nula, si a una primitiva de una cierta función le sumamos una constante cualquiera, se obtiene otra primitiva. Entonces, el conjunto de las infinitas primitivas de una función es lo que habitualmente llamamos integral indefinida de la función. ¿Según esto, las propiedades de las derivadas y las primitivas integrales tendrán o tienen alguna relación? Sí.

Partiendo de las propiedades de las derivadas, se obtienen las correspondientes de las integrales indefinidas. La integral de una suma es igual a la suma de las integrales. Análogamente sucede para la resta.

Y el producto de una constante por una función también es igual a la constante por la integral de la función. Entonces, análogamente a la tabla antes mencionada, se construye otra de integrales indefinidas llamada tabla de integrales inmediatas. ¿Y qué sucede con el producto? La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones proporciona un método de integración llamado integración por partes.

Este método permite integrar el producto de dos funciones de forma que la integral que queda al aplicar la fórmula de la integración por partes sea inmediata o sea más fácil de resolver. Este método suele utilizarse en casos muy determinados como son el producto de funciones una exponencial por un polinomio, una trigonométrica por una exponencial, una trigonométrica por un polinomio y cosas de este estilo. ¿Entonces la integral de un producto de dos funciones siempre se debe hacer utilizando el método de integración por partes? No siempre.

Por ejemplo, cuando se trate de una función y su derivada, es decir, el producto de una función y otra función que es su derivada, es mejor utilizar otro método que es el de sustitución o cambio de variable, que se reduce de la regla de la cadena que ya hemos estudiado

anteriormente. Este método es más fácil y más rápido que el de la integración por partes. Es conveniente que cuando nos encontremos con un integral producto de dos funciones comprobemos si una de las dos funciones es la derivada de otra para utilizar el método de sustitución.

¿Qué importancia tiene este tema con respecto a las pruebas presenciales? Es decir, ¿va a tener mucha presencia en las pruebas presenciales? Muchísima. Podemos asegurar que en la prueba personal seguro que aparece alguna integral. O sea, que la integral es una pregunta segura.

Sí, pero lo que debe quedar bien claro es que no siempre va a ser una integral indefinida. Muy probablemente sea una integral definida. Hablaremos más adelante lo que son.

Muy bien, pues lo veremos más adelante. ¿Estudiamos algún método más para el cálculo de primitivas de funciones? En la lección 29 vemos un método nuevo que es para calcular primitivas de funciones racionales. Para este método utilizamos la descomposición en fracciones simples de una función racional que estudiamos en una lección anterior.

Bueno, una función simple cuando es irreducible se descompone como una suma de integrales, de factores simples, y éstas suelen ser funciones que al integrar dan un logaritmo, un arcotangente o bien una potencia. ¿Algún tipo más de integración? En el último apartado de esta lección aplicamos el método de sustitución para ciertos tipos de integrales de funciones trigonométricas. Realizando distintos cambios de estas integrales se pueden reducir a integrales de funciones racionales.

Un cambio que suele ser muy usual es utilizar una variable t igual a la tangente de x medios. Por ejemplo, la integral de la función 1 partido por $1 + \cos x$ con este cambio se convierte en la función 1 . ¿Siempre se hace el cambio t igual a tangente de x medios? No siempre. A veces se deben hacer otros más convenientes porque reducen más los cálculos.

Por ejemplo, cuando el integrando es una función par en seno y coseno es decir, cuando al cambiar seno por menos seno y coseno por menos coseno la función no varía el cambio más adecuado es hacer t igual a tangente de x . En cambio, cuando el integrando es impar en coseno o sea, que cambia el signo al cambiar coseno por menos coseno, el cambio mejor es t igual a seno de x . Y por último, cuando es impar en seno es indicado el cambio t igual a coseno de x . Bien, hay alguna cosa más que resaltar en este tema 29. Queremos destacar que en las funciones trigonométricas a veces es mejor, antes de cualquier cálculo, utilizar alguna de las identidades que se estudiaron en la lección de trigonometría. Por ejemplo, para la integral de la función producto de seno cuadrado por coseno cuadrado, aunque es par, tanto en seno como coseno, se puede utilizar el cambio t igual a tangente de x . Es más fácil utilizar la fórmula del ángulo doble y escribir el integrando en la forma $1 - \cos 4x$, todo ello partido por 8 , que es la suma de integrales inmediatas.

Bien, pues llegamos por fin al último tema del libro, el tema 30. ¿Qué es lo que vemos? En él estudiamos el concepto de integral definida, que habíamos comentado antes, de una función.

Primero se estudia el caso de las integrales de funciones escalonadas.

Las funciones escalonadas son funciones que son constantes a trozos. Y ya después se generaliza a funciones, ya un caso más general, que son las funciones acotadas. ¿Se estudia alguna propiedad de estas integrales? De las escalonadas se ven cuatro propiedades.

La linealidad, es decir, que la integral de la suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos, y que la integral de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función. Siguiendo con las propiedades de la integral definida de funciones escalonadas, también comprobamos que es monótona y aditiva respecto al intervalo de integración. ¿Qué significa que la integral sea monótona? Significa que cuando una función f es menor o igual que otra función g , la integral de f es también menor o igual que la de g . ¿Y que sea aditiva respecto al intervalo de integración? Que la integral entre a y b es igual a la integral entre a y c más la integral entre c y b , cualquiera que sea el punto perteneciente al intervalo a, b . Después de estas propiedades, tenemos una condición de integrabilidad equivalente a la definición, pero mucho más cómoda de manejar.

Es la condición de integrabilidad de Riemann. A partir de ella, se prueban dos resultados muy importantes. Primero, toda función monótona es integrable, y segundo, toda función continua es integrable.

Y respecto a las integrales de las funciones acotadas, ¿qué podemos recomendar? De la condición de integrabilidad de Riemann que hemos mencionado antes y de las propiedades de las integrales de las funciones escalonadas, se deducen las mismas propiedades para las acotadas. O sea, la linealidad, la monotonía y la actividad respecto al intervalo. Pues con esto debemos despedirnos.

Muchas gracias y muy buenas noches. Muchas gracias, Isabel. Buenas noches.

Buenas noches a todos. Y hasta aquí la programación de la UNED. Les esperamos de nuevo mañana, a partir de nuestra hora habitual, siete de la tarde, seis en la Comunidad Canaria.

Gracias por su compañía. Que pasen una feliz noche. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org