

AC 15 2

Matemáticas especiales. Conjunto vacío, universal y complementario. Emisión segunda.

Fecha de emisión 10 del 10 del 79. Vamos a empezar recordando los conceptos más importantes de la emisión anterior. ¿Se atreverían a enunciarlos ustedes? Bueno, podemos intentarlo.

Yo diría que debemos intentarlo. Una de las tareas que el alumno debe realizar en todo aprendizaje es la de expresar por sí mismo y con sus propias palabras las definiciones y enunciados que pretende asimilar. ¿Usted quiere decir que debemos adquirir soltura desde un principio? Efectivamente.

Solo cuando hacemos el esfuerzo de expresar verbalmente o por escrito una idea podemos decir que empezamos a dominarla. ¿Quién de ustedes me dice lo que es un conjunto? Yo mismo. Muy bien.

Un conjunto es una reunión o colección de objetos que se define con un criterio arbitrario, pero suficientemente claro que nos permita saber cuándo un objeto es un elemento o no lo es del conjunto. Bueno, yo añadiría que los objetos del conjunto son sus elementos y que de cada elemento se dice que pertenece al conjunto. Muy bien.

Han retenido correctamente que un conjunto se construye con un criterio rígido que permita saber cuándo un elemento pertenece al conjunto. Y cuándo es un objeto que no es elemento o no pertenece al conjunto. Entiendo que ese criterio al que usted se refiere puede darse de dos formas.

Por comprensión y por extensión. Decimos que definimos un conjunto por extensión cuando enumeramos todos y cada uno de los elementos. Un conjunto estará definido por comprensión cuando enunciamos una propiedad que cumplen todos los elementos del conjunto y solamente ellos.

Muy bien, muy bien. Antes de entrar en el tema de esta emisión necesitamos recordar el concepto de subconjunto. Señorita.

Bueno, dado un conjunto, decimos que otro conjunto es subconjunto del primero cuando todos los elementos de este pertenecen al conjunto dado. ¿Y cómo llamamos a la relación existente entre estos dos conjuntos? Se dice que el subconjunto está incluido en el conjunto dado. Consideremos el conjunto definido por comprensión.

Los números naturales menores que 10. Si ahora defino un segundo conjunto poniendo una restricción a la propiedad que cumplían los elementos del primero, obtenemos un subconjunto de él. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales menores que 10 y además que sean pares.

¿Observan que es un subconjunto del primero? Así es, sí, sí. Puesto que este conjunto sería el formado por los elementos 0, 2, 4, 6 y 8 que pertenecen claramente al conjunto de partida. Utilizando el mismo método vamos a construir otro subconjunto.

Recuerden que el conjunto de partida era el conjunto de los números naturales menores que 10. Restringamos esta propiedad y consideremos el conjunto de los números naturales menores que 10 y mayores que 15. ¿Cuáles son los elementos de este conjunto? Yo creo que ese conjunto no existe porque no hay ningún número natural que sea menor que 10 y mayor que 15 a la vez.

A mí me parece que este conjunto está mal definido. Se trata de un conjunto muy peculiar, aquel que no tiene ningún elemento. Aunque este conjunto no responde a la idea general de conjunto, en matemáticas es necesario admitir su existencia.

La propiedad anterior nos define este nuevo conjunto al que llamaremos conjunto vacío. Perdóneme, pero yo no veo la necesidad de complicar las cosas con la introducción de este conjunto tan extraño. Es natural que al principio les parezca un conjunto muy peculiar.

Sin embargo, conforme sigamos avanzando en la asignatura, terminarán comprendiendo la necesidad del conjunto vacío para dar coherencia a toda la teoría de conjuntos. En este sentido, vamos a ver ahora una propiedad del conjunto vacío. Esta es la de ser subconjunto de cualquier conjunto.

Me queda una duda. Vamos a ver. En el ejemplo anterior definíamos el conjunto vacío a partir del conjunto de los números naturales menores que 10, añadiendo que además fueran mayores que 15.

Así era. Si partiéramos de otro conjunto definido por otra propiedad, podríamos encontrar otro subconjunto sin ningún elemento. ¿Sería el mismo conjunto vacío? Sí, sería el mismo conjunto que hemos llamado conjunto vacío, ya que lo hemos definido como el conjunto que no tiene ningún elemento.

¿Ha quedado claro lo que es el conjunto vacío? Yo creo que sí. Bueno, pues, entonces intente poner un ejemplo. Vamos a ver.

Sea el conjunto definido por comprensión los polígonos de tres lados. Ahora vamos a restringir esta propiedad para obtener un subconjunto vacío. Consideramos el conjunto de los polígonos de tres lados que además tengan dos ángulos rectos.

Este subconjunto es el conjunto vacío ya que no contiene ningún elemento. Claro, no tiene ningún elemento porque no existe ningún triángulo que tenga dos ángulos rectos. Observen que este conjunto vacío es el mismo que el del ejemplo anterior, ya que no contiene ningún triángulo, ningún número ni ningún otro objeto.

Bueno, pues me parece que ha quedado bastante claro. Podemos pasar a ver nuevos

conceptos. Bien, considerando ahora un conjunto cualquiera que llamaremos E , podemos formar todos los subconjuntos posibles de él.

Tenemos así una familia de conjuntos que llamamos el conjunto de las partes de E . Cada elemento de este nuevo conjunto es un subconjunto del conjunto E de partida. Bueno, vamos a ver si lo he entendido. Como el conjunto E es arbitrario, elijo el conjunto de los números naturales menores que tres.

Un elemento del conjunto de las partes de E sería el subconjunto formado por el 1 y el 2. Otros elementos del conjunto de las partes de E serían, por ejemplo, el subconjunto formado por el 0 y el 1 y el subconjunto formado únicamente por el 2. De acuerdo. Observen también que el conjunto vacío es un elemento del conjunto de las partes de E , puesto que es un subconjunto de E . Asimismo, habíamos visto en la emisión anterior que cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo, por lo que E es otro elemento del conjunto de las partes de E . Entiendo que al decir conjunto de las partes de E , consideramos como elementos suyos el conjunto vacío y el conjunto E completo, aunque no responden a lo que vulgarmente entendemos por partes de un conjunto. Veo que ha comprendido que el conjunto de las partes de E contiene como elementos todos los subconjuntos de E . Al conjunto E le llamamos conjunto universal.

En el caso que estamos tratando, el conjunto universal es el conjunto de los números naturales menores que 3. Bueno, entonces la palabra universal que utilizamos para denominar este conjunto no se refiere a la cantidad de elementos que tiene ni a que tenga todos los elementos posibles. Por supuesto que no. Cualquier conjunto puede ser universal siempre que lo caractericemos como tal, lo cual tiene como consecuencia, y esto es lo esencial, que todos los conjuntos con los que trabajemos después sean subconjuntos del conjunto universal.

Una vez aclarado lo que entendemos por conjunto universal, pasemos a estudiar el conjunto complementario. Tomemos como universal el conjunto de los números naturales menores que 10, que le llamaremos E , y consideremos el subconjunto de E formado por los números naturales pares menores que 10. Si se fijan en este conjunto y en el universal, ¿no observan que existe otro subconjunto de E que contiene todos los elementos de E que no pertenecen al conjunto de los números pares menores que 10? Claro, sería el conjunto de los números naturales impares menores que 10.

Exacto. Diremos que dicho conjunto es complementario del conjunto de los números pares menores que 10 en el conjunto E . Bueno, entonces cualquier subconjunto de E tiene un conjunto complementario. Efectivamente.

Basta que yo les dé otro elemento de las partes de E para que ustedes encuentren fácilmente su complementario. Por ejemplo, sea el conjunto de los números naturales menores que 8. Señorita, ¿cuál es su complementario? Sería el conjunto formado por los números 8 y 9. Bueno, puesto que está captada la idea intuitiva de conjunto complementario, vamos a definir ahora su concepto. Dado un conjunto A contenido en un conjunto universal E , llamamos conjunto complementario de A en E al formado por todos los elementos de E que no pertenecen al

conjunto A. Entonces, según todo lo que se ha dicho, ¿se puede considerar que el conjunto del conjunto de los números pares menores que 10 es el complementario del conjunto de los números impares menores que 10? Sí, por la definición que hemos dado de conjunto complementario.

Generalizando, podemos afirmar que si un conjunto es complementario en E de otro conjunto, el segundo también lo es del primero. Bien, creo que es suficiente por hoy. En la siguiente emisión volveremos otra vez sobre estos conceptos.