

AC 15 74

GALICIA, EL PUEBLO DE LAS NUVES Saludos, bienvenidos a este tiempo de radio educativa y cultural que la UNED propone a los alumnos del curso de acceso directo para mayores de 25 años, el CAT. Este es un espacio que elabora las distintas asignaturas que conforman el curso de acceso y que realiza el centro de diseño y producción de medios audiovisuales de la UNED. Emitimos a través de Radio Nacional de España, en Radio 3 Frecuencia Modulada y en la 1.359 de Onda Media.

Esta noche en nuestro programa de Matemáticas Especiales nos acompaña el profesor Pedro Jiménez Guerra. Con él comentaremos los temas 18 al 23 que nos hablan de funciones y límites. Esta noche en nuestro programa de Matemáticas Especiales vamos a ver los temas que van del 18 al 23.

Nos acompaña el profesor Pedro Jiménez. Muy buenas noches. Buenas noches Isabel y buenas noches, bueno, también en general a nuestros alumnos y a todos nuestros ayudantes.

Bien, como hemos dicho vamos a hablar de los temas 18 al 23, pero en concreto, ¿de qué nos vas a hablar? ¿Qué es lo que se incluye en estos temas? Bueno, el tema 18 trata de sucesiones, el tema 19 de cálculo de límites de sucesiones, el tema 20 y el tema 21 tratan de funciones y polinomios y luego ya los temas 22 y 23 se dedican al estudio de los límites de funciones y de las funciones continuas. Pues podemos pasar a comentar el primer tema que nos ocupa, que es el tema 18, las sucesiones. Bien, en el tema 18 se introduce el concepto de sucesión, el concepto de límite de una sucesión y el de sucesión convergente, eso es básicamente.

Pero, ¿qué es una sucesión? Bueno, pues en general dado un conjunto cualquiera se llama sucesión de elementos de dicho conjunto, por ejemplo denotemos a dicho conjunto C , a una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto C . A la imagen del 1 en C se le da el nombre del primer elemento de la sucesión, a la imagen del 2, segundo elemento de la sucesión y en general la imagen de un número genérico N recibe el nombre de elemento n ésimo de la sucesión y suele denominarse término general de dicha sucesión. Cuando el conjunto C es un conjunto de números, generalmente de números reales, pues decimos que la sucesión es una sucesión numérica. Por tanto, definir una sucesión no es otra cosa que establecer el número o término que ocupa un cierto lugar, es decir, fijar la imagen de un determinado número natural en el conjunto C que nos ocupa.

De la definición resulta inmediatamente que toda sucesión tiene un primer elemento y que cada término admite un término siguiente, lo que equivale a decir que una sucesión no tiene nunca último término. Según distintas características específicas que puedan poseer los términos de la sucesión, pues hablamos de sucesiones positivas, de sucesiones monótonas crecientes, sucesiones monótonas decrecientes o también de sucesiones acotadas, superior o inferior. ¿Pero qué se entiende por sucesión convergente? Bueno, cuando los términos de una sucesión se van acercando cada vez más a un cierto valor, a este valor se le llama límite de la

sucesión.

Este es un concepto fundamental en matemáticas. En general decimos que una sucesión a_n tiene por límite a , si se puede conseguir que la distancia o el valor absoluto de la diferencia entre el término a_n y dicho límite sea tan pequeña como queramos, sin más que darle al valor n los valores tan grandes como sea necesario. Las sucesiones que tienen límite se llaman sucesiones convergentes.

Destaquemos que este es un concepto que ha sido perseguido durante mucho tiempo en matemáticas y que fue formalizado a finales del siglo XVIII de una forma muy rigurosa por Cochín. Insistiendo otra vez en el concepto de límite, pues el límite de una sucesión a_n es un número a cuando el valor absoluto de la diferencia de a_n y de a tiende a cero cuando n tiende a infinito, es decir, cuando n se toma suficientemente grande. Existen sucesiones particularmente interesantes, por ejemplo, la sucesión de término general $1 + \frac{1}{n^n}$ por n elevado a n , cuyos primeros términos tienen una representación en el espacio tridimensional bastante clara.

Por ejemplo, el primer término $1 + \frac{1}{1^1}$ se puede interpretar como la longitud de un segmento. El segundo término $1 + \frac{1}{2^2}$ se puede lógicamente interpretar como el área de un cuadrado. El tercer término $1 + \frac{1}{3^3}$ al cubo podríamos interpretarlo como el volumen de un cubo.

Los siguientes términos ya no podemos representarlos en el espacio tridimensional, pero de todas formas esta sucesión es una sucesión que hay que tener en cuenta, es una sucesión convergente y que define un número real que se conoce con el número e . El número e es extraordinariamente importante en matemáticas superiores, a pesar de que no es un número racional, pero tampoco es tan simplemente irracional como el raíz de 2, que como sabemos es la solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. El número e no es solución de ninguna ecuación polinómica de ningún grado con coeficientes enteros. Es un número que llamamos irracional trascendente. Sin embargo, tenemos que el número e admite varias expresiones infinitas más o menos sencillas, como puede ser la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ cuando n va desde 0 hasta infinito.

En este tema utilizamos el número e para el cálculo de límites y también nos aparece cuando queremos, bueno, en concreto aparece cuando queremos calcular límites de la forma a^{b_n} , las sucesiones cuyo término general tiene esa forma, donde la base a tiende a 1 y el exponente b_n tiende a infinito. Existen otras sucesiones especialmente importantes, como son las sucesiones aritméticas y las sucesiones geométricas, que aparecen en la práctica real, en el día a día, como por ejemplo en los cálculos de intereses, bien simple o bien compuesto, y otras que iremos viendo a lo largo de los capítulos siguientes. El cálculo de límites es objeto del siguiente tema, el tema 19, ¿no es así? Pues en efecto.

En el tema 19 el alumno tendrá la oportunidad de aprender las técnicas más elementales para el cálculo de los límites de sucesiones. Es importante recordar las propiedades aritméticas de

los límites de sucesiones, deteniéndonos un poco más en el caso de límites infinitos, cuyo resumen el alumno lo puede encontrar en el recuadro de la página 408 del libro de teoría recomendado. Para a continuación pasar a dominar las técnicas de resolución de los llamados límites indeterminados, que permiten resolver indeterminaciones del tipo cero partido por cero, infinito partido por infinito, menos infinito, perdón, infinito menos infinito, cero por infinito, uno elevado a infinito y otras.

¿Podríamos comentar alguna de estas técnicas? Pues yo creo que sí, que es una magnífica idea. Vamos a comentar algunas de ellas. Entre las indeterminaciones más sencillas de resolver se encuentran aquellas cuyo término general viene expresado como cociente de dos polinomios, y la mecánica de resolución de éstas consiste en dividir numerador y denominador por la mayor potencia de N . Otra indeterminación frecuente es la infinito menos infinito, que en muchas ocasiones se resuelve sin más que efectuar la diferencia y calcular el límite de lo que resulte.

En los casos donde al menos en uno de los sumandos aparece un radical, la indeterminación se suele resolver multiplicando y dividiendo por su expresión conjugada. Por último, en el caso de presentarse la indeterminación uno elevado a infinito, la estrategia que conviene seguir es sumar y restar uno y hacer las transformaciones necesarias para ir obteniendo una expresión del tipo, permíteme la expresión tan coloquial, uno más uno partido por algo elevado a algo, cuando ese algo tiende a infinito, que nos permita aplicar la definición del número. Pasamos ya entonces a hablar de las funciones, pero ¿qué es una función? Pues vamos a ver si nos podemos decir de forma que todos lo entendamos.

Muchas relaciones usuales involucran a dos variables, de tal modo que el valor de una de ellas depende del valor de la otra. Así, por ejemplo, las ventas de un producto dependen del precio del producto, la distancia recorrida por un automóvil depende de su velocidad y esto traducido al lenguaje matemático significa hablar de funciones. Una función es una relación entre dos magnitudes, de tal manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.

Por supuesto que las funciones más interesantes son las funciones reales de variables real, es decir, aquellas que están definidas sobre los números reales y cuyos valores son también números reales. El conjunto de las funciones reales de variables real constituye un objeto matemático que ha ido adquiriendo una entidad e individualidad propias que lo hace el merecedor de un estudio muy especial. Una función real de variables real se puede multiplicar por un número y nos da otra función del mismo tipo.

Este tipo de funciones también se pueden sumar entre sí. También para las funciones reales de variables real podemos utilizar la composición de funciones y componer una con otra y nos vuelve a dar otra función del mismo tipo. Más adelante veremos que una función se puede también derivar, integrar y manipular de diversas maneras que iremos viendo a lo largo de los siguientes capítulos.

En el desarrollo de la matemática contemporánea el estudio de las funciones como elementos

de un conjunto con los que se puede operar de muy diversas maneras constituye lo que hoy día llamamos el análisis funcional. Me da la sensación de que existe un salto cualitativo en esta parte del programa, ¿es así? Pues en cierto modo sí, es así, es cierto. El objetivo principal de esta parte del programa que iniciamos con este tema, sobre el estudio de las funciones, es adquirir una serie de herramientas como son límites de funciones, continuidad, derivabilidad, etcétera, que nos permitan posteriormente analizar las funciones, estudiarlas y representarlas.

Una función real de variables real, f , se representa normalmente por medio de una gráfica o curva en el plano xy , donde en el eje de abscisas se representa la variable x y en el eje de ordenadas la variable dependiente y igual a f de x . La gráfica de una función hay que tener en cuenta que nos da una información enorme sobre su comportamiento y por ello es especialmente importante aprender a interpretarlas y a obtenerlas. Podemos pasar al siguiente tema, el 21. El tema 21 nos habla de polinomios.

En efecto, el tema 21 introduce el concepto básico de polinomios. También en él se definen las operaciones aritméticas entre polinomios y se presenta la descomposición de un polinomio en factores infinitos. ¿Pero qué es un polinomio? Pues los polinomios son una cosa muy sencilla, dependiendo para quién, dependiendo para quién, pero cayendo en el tópico, los polinomios son de las funciones más sencillas.

Son expresiones en las que aparecen unos números determinados, llamados coeficientes, relacionados con una variable mediante las operaciones elementales de suma, diferencia y multiplicación. Los polinomios, definidos así, dan lugar a lo que se llama las funciones polinómicas, que son los ejemplos más sencillos, como antes he dicho, de funciones que se nos pueden presentar. La importancia de los polinomios es múltiple, tanto en las matemáticas puras como en las matemáticas aplicadas.

Las funciones polinómicas aparecen en muchos casos y en especial a la hora de aproximar funciones, y hay que tener en cuenta que estas aproximaciones nos permiten operar de forma más fácil y más rápida siempre que estudiemos previamente el error que se cometen al realizar dichas aproximaciones. En concreto, hoy en día y cada vez más, con el uso de ordenadores, las técnicas algorítmicas y de aproximación de funciones van adquiriendo cada vez una mayor importancia, que a su vez redundará en que los polinomios tengan también una mayor importancia y una mayor relevancia para el estudio de las cuestiones matemáticas. Es importante nuestro conocimiento de las funciones polinómicas, por su ayuda nos va a permitir calcular valores desconocidos de un fenómeno a partir de otros conocidos.

Este proceso en matemáticas se conoce con el nombre de interpolación. Dados una serie de puntos, llamamos función de interpolación a una cualquiera de las funciones que pasan por todos ellos. Las funciones polinómicas, dados que son muy fáciles de manejar, serán las preferidas para realizar interpolaciones.

Hay que tener en cuenta que el grado del polinomio interpolador dependerá del número de los datos conocidos y que, en cualquier caso, siempre será estrictamente menor que ese número

de valores dados a priori. Otro caso en el que queda patente la importancia del estudio de los polinomios es el caso de las funciones desarrollables mediante series funcionales polinómicas. Por ejemplo, la función 1 partido por 1 menos x , o también la función logaritmo de 1 menos x , etc.

Este proceso de sustituir una función por un polinomio requiere herramientas matemáticas que no son propias de este curso, pero a veces ocurre que los alumnos se preguntan el por qué del estudio de un tema y esto puede ser un ejemplo de su justificación. Y saliéndonos un poco del nivel del curso, pues habría que resaltar el hecho de que si consideramos las funciones continuas en un intervalo compacto de la recta real, entonces los polinomios son densos en ese espacio de las funciones continuas. Y en el tema 22, límite de funciones, ¿qué es lo que van a ver los alumnos? La noción del límite es fundamental en el cálculo, de modo que es muy importante que el alumno adquiera un buen manejo práctico de este concepto antes de seguir con los siguientes capítulos.

¿Qué entendemos por límite? Pues de ordinario hablamos de la velocidad límite, el límite de nuestra propia resistencia, los límites de la tecnología moderna, o estirar un muelle hasta el límite. ¿Cuántas veces escuchamos o decimos estoy al límite de la desesperación? Todas estas frases sugieren que el límite es una especie de cota que a veces puede no ser alcanzable y otras no sólo alcanzable sino superable. A mediados del siglo V antes de Cristo, Zenón de Elea plantea algunas de las paradojas más persistentes en la historia de las matemáticas y de la filosofía.

Una de ellas es la conocida paradoja de Aquiles y de la tortuga. Zenón afirmaba que si Aquiles y una tortuga compiten en una carrera en la que se supone que a la tortuga se le da un metro de ventaja y que Aquiles es siempre diez veces más rápido que la tortuga, pues Aquiles, el de los pies alados, no alcanzaría nunca la tortuga. Veamos por qué.

Zenón razona así. Cuando Aquiles haya recorrido el metro de ventaja dado, la tortuga habrá recorrido un decímetro, por lo que ambos se encuentran a una distancia de un decímetro. Es decir, de alguna forma estamos en la situación inicial.

Si seguimos observando la carrera, cuando Aquiles vuelva a recorrer el decímetro de ventaja, la tortuga estará un decímetro más lejos, más adelante y así sucesivamente. Cada vez Aquiles y la tortuga vuelven a una especie de situación inicial. Se plantea aquí, entre otros, el problema de la continuidad del tiempo y del espacio y el de la infinitud de puntos de un segmento.

Dos cuestiones matemáticas que son de una gran relevancia. El continuo matemático y el problema del infinito. Ambas cuestiones son abordadas en el cálculo infinitesimal.

La definición de límite es un concepto que mezcla lo infinitamente pequeño con los infinitos puntos de un intervalo. El concepto de simple, obviamente, no es un concepto sencillo. Intuitivamente, su noción puede parecer clara.

Sin embargo, la noción de límite es en realidad bastante complicada y se requiere un esfuerzo considerable para obtener una comprensión de él lo más completa posible. De forma intuitiva, el límite de una función f de X , cuando X tiende a un punto A , es el valor al que se aproximan las imágenes de la función f de X cuando la variable X se aproxima a dicho punto A . A mí esta parte que acabas de explicar me parece, bueno, pues bastante complicada. Bastante complicada, además, porque tiene algo filosófico, casi, y aparte se complica con las matemáticas.

¿Puede también el alumno tener estas dificultades que yo encuentro en esta parte? No, yo creo que no. Sinceramente creo que no. Lo que pasa es que siempre la matemática así, oída, sin ser vista a la vez, pues lleva consigo un sobreesfuerzo de comprensión.

Pero vamos, lo que yo quiero decir es que el concepto de límite es un concepto fundamental en el cálculo y también que se debe adquirir un buen manejo práctico de este concepto y que, a mi forma de ver, la gran cantidad de ejemplos y ejercicios que aparecen en los textos base ayudan a afianzar las definiciones sin mayor problema. En el texto de teoría el alumno se encontrará con la terminología epsilon delta. Téngase en cuenta que esta terminología se utiliza en las definiciones y demostraciones de teoremas, pero en general no se utiliza en el cálculo práctico de límites ya que no resulta muy útil.

Sí quisiera recalcar que cuando hablamos del límite de una función f de x , cuando x tiende a un punto a , no nos interesa el valor de la función en dicho punto a , ya que el estudio del límite de una función en un punto y el valor de la función en dicho punto es objeto del estudio de la continuidad de la función en dicho punto. Lo trataremos en el tema siguiente. ¿Qué técnicas eficaces pueden y deben utilizarse para el cálculo de límites? Cuando queramos obtener los límites de una función, cuando la variable tiende a infinito, el cálculo de los límites es muy similar al que hemos estudiado en el tema 19 para el caso de sucesiones.

Por supuesto que cuando x tiende a menos infinito, pues podemos hacer el cambio x por $-x$ y estamos en la situación anterior, aunque en algunos casos pueda ser preferible ejecutarlo directamente. Cuando la función es continua en el punto, pues para hallar el límite de la función cuando la variable tiende a dicho punto, pues basta calcular el valor de la función en dicho punto, como veremos luego en el tema dedicado al estudio de las funciones continuas. Cuando a sustituir la variable por el límite se llegue a una expresión indeterminada, convendrá buscar auxilio en las reglas del cálculo de límites.

Por ejemplo, en los límites que aparecen en determinaciones del tipo 0 partido por 0, conviene simplificar numerador y denominador dividiendo por el factor x menos a , por ser este factor el causante de la indeterminación. Por otra parte, en los límites del tipo infinito menos infinito, conviene efectuar la operación con lo que probablemente se transformará en otra indeterminación del tipo 0 partido por 0. En los límites del tipo 1 elevado a infinito, la estrategia que conviene seguir es idéntica a la comentada en el caso de sucesiones. Y vuelvo a insistir, la realización de los ejercicios que aparecen en el libro de problemas suaviza el esfuerzo que requiere la comprensión del concepto de límite de una función que, como ya hemos dicho, es

un concepto arduo, serio e importante.

Pues pasamos ya al último tema, el 23 de este programa, las funciones continuas. Pues sí, vamos a encarar ya el último tema, las funciones continuas. Con las funciones intentamos representar y estudiar cuantitativamente el cambio que una magnitud determinada experimenta cuando varía otra.

Este cambio, en la mayor parte de los fenómenos y de las magnitudes que nos interesa medir, transcurre sin salto. Por ejemplo, para una pequeña variación de tiempo, el espacio recorrido por un móvil varía poco, y cuanto más pequeña sea la variación del tiempo, tanto menor será la variación del espacio. Este es el motivo por el cual las funciones que resultan más interesantes de estudiar son las que denominamos funciones continuas, es decir, aquellas en las que a pequeños cambios de la variable independiente corresponden pequeños cambios de la variable dependiente.

El término continuo tiene el mismo sentido en matemáticas pues que en el lenguaje cotidiano. En términos intuitivos, decir que una función f es continua en un punto x igual a a , significa que su gráfica no sufre interrupción en a , es decir, que ni se rompe, ni tiene saltos, ni tiene huecos, al acercarnos a dicho punto o en dicho punto. Dicho de otra manera, se puede dibujar su gráfica sin levantar el papel del lápiz, perdón, sin levantar el lápiz del papel.

En términos matemáticos decimos lo mismo, es decir, se dice que una función f es continua en un punto a cuando el límite de la función cuando x tiende a a coincide con el valor de la función en dicho punto, que es lo mismo que afirmar que su gráfica no sufre saltos en a o que al pasar por a no levantó el lápiz del papel. Esta definición tiene tres consecuencias importantes. Primero, tiene que existir, tiene que estar definida la función en el punto a , tiene que existir el límite de f de x cuando x tiende a a y por último, ambos valores deben de coincidir.

¿Se podría poner algún ejemplo de funciones continuas? Pues sí, a lo largo de todo, a partir de ahora, de ahora en adelante, a lo largo del estudio de la asignatura, el alumno se irá encontrando con numerosos ejemplos de funciones continuas. Como ya hemos dicho, las funciones continuas más sencillas son las funciones polinómicas. Por otra parte, las funciones racionales, es decir, las funciones que son cocientes de dos polinomios, también son continuas, salvo para los puntos en los que se anula el denominador.

Por otra parte, también las funciones definidas a trozos serán continuas si en cada trozo lo son y si lo son en los puntos de unión. En temas posteriores se estudiarán la función exponencial, la función logarítmica y las funciones trigonométricas que constituyen magníficos ejemplos de funciones continuas. En general, una función diremos que es discontinua en todos los puntos que no pertenezcan a su dominio, puesto que la función ni siquiera está definida.

En este tema, el alumno estudiará algunas de las muchas propiedades interesantes de las funciones continuas. De ellas resultan multitud de aplicaciones importantes en fenómenos físicos, biológicos y económicos. Por último, finalizamos el tema dando tres teoremas sobre

funciones continuas en intervalos cuya demostración requiere un aparato matemático algo fuerte.

Pero, sin embargo, sí es fundamental entender perfectamente sus enunciados y sus consecuencias y profundizar en ellas, aunque, como ya sabe el alumno, no existen cuestiones de carácter teórico en las pruebas personales. ¿Cuáles son estos tres teoremas sobre funciones continuas? Pues vamos a enunciar cada uno de ellos con un ejemplo de la vida cotidiana y con la introducción que se hace en el libro a los enunciados de los teoremas. El alumno puede captar el significado de cada uno de ellos.

Por ejemplo, el teorema de los valores intermedios. Consideremos la altura de una persona. Si un niño mide 150 centímetros al cumplir 13 años y 168 centímetros al cumplir 14, pues quiere decirse, obviamente, que en algún instante intermedio midió 160 centímetros, porque esto parece realmente razonable, dado que pensamos que crece continuamente, sin saltos bruscos en su talla.

Por otra parte, si un hombre escala durante un día desde los 5.000 pies a los 11.000 pies, podemos afirmar que ha estado a una altura de 7.000 pies, al menos una vez durante el día. Pues el teorema de los valores intermedios establece esto en términos matemáticos. Vamos, por ejemplo, al teorema de Bolzano.

Pues si en un plano pintamos una recta y dos puntos, uno a cada lado de ella, y queremos unir estos puntos por una curva sin levantar el lápiz del papel, tendremos necesariamente que atravesar la recta con el lápiz. Este es un teorema de gran utilidad, junto con el anterior. En el primer caso afirmamos que de un valor a otro pasamos por todos los valores intermedios, y de ahí su nombre.

Y en el segundo afirmamos que si toma valores de signo contrario, entonces existe un punto donde la función toma necesariamente el valor cero. Por último, pues se estudia también el teorema de Ballestrass, que intuitivamente viene a afirmar que una carretera de montaña alcanza en alguno de sus puntos su cota más alta. Todos estos son principios muy sencillos que forman el armazón de lo que constituye el cálculo infinitesimal.

Bien, nos queda ya muy poco tiempo, pero antes de acabar, quería que nos diera alguna recomendación final y algún comentario sobre la realización de pruebas presenciales, aunque ya hemos dicho que en el mes de mayo tenemos un programa íntegro dedicado a ello. Bueno, aunque luego en el mes de mayo tengamos la oportunidad de volver a insistir en la realización práctica de las pruebas presenciales, pues bueno, ahora podríamos adelantar que efectivamente, como ya tú misma ha señalado anteriormente, existe un salto cualitativo en la materia de asignatura a partir del tema 18. Aparecen conceptos nuevos, algo más difíciles, y que van a jugar un papel muy importante en el resto de los temas y en general en la asignatura del análisis matemático.

Conceptos, por ello, que hay que procurar entender muy bien. También se va sintiendo la

necesidad de ir escribiendo correctamente, con rigor. Conceptos como, por ejemplo, los del límite de una sucesión, límite de una función, el concepto de función continua, necesitan que se escriba con rigor, con notación matemática, sin olvidar al mismo tiempo el aspecto práctico de lo que es fundamental y también teniendo en cuenta el nivel que se pide en este curso.

Para todo ello es necesario realizar muchos y muchos ejercicios. Entre otros, yo me atrevería a sugerir al alumno hacer hincapié en el problema que traten del cálculo de límites de sucesiones. Esto en lo referente a sucesiones.

En lo referente a funciones, en general, hacer ejercicios acerca de las operaciones con funciones. También ejercitarse en la determinación del dominio de una función. Obtener funciones compuestas de funciones, determinar la función inversa de una función dada.

Por supuesto, calcular límites de funciones y estudiar si una función es continua o no. Es decir, estudiar la continuidad de una función. También, aunque ya con menos importancia, pues el alumno puede hacer algunos ejercicios en los que se encuentren y se vean en la necesidad de aplicar los tres teoremas que antes hemos mencionado.

Los teoremas de Bolzano, de Weierstrass y el teorema de los valores intermedios. Y por último, pues, en lo referente a polinomios, conviene que el alumno se ejercite en realizar operaciones con polinomios, en la aplicación de la regla de Ruffini, en la obtención de la descomposición de un polinomio en factores irreducibles y en la descomposición de una función racional en funciones. Bien, pues debemos despedir por hoy nuestro programa de matemáticas especiales.

Muchísimas gracias profesor Pedro Guerra y hasta otra ocasión. Pues muchísimas gracias a todos los que habéis tenido la amabilidad de escucharnos y muchísimas gracias en particular a ti Isabel por tu paciencia. Muchas gracias y buena noche.

Esta noche nuestro programa matemáticas especiales. Mañana nuestro espacio está dedicado a Foro de Cultura Alemana. Ya debemos despedirnos.

Gracias por su compañía y hasta mañana. La UNED les ha acompañado con dos horas y media de radio educativa y cultural. Mañana estaremos de nuevo con todos ustedes en esta misma emisora y a nuestra hora habitual, ocho y media de la tarde, siete y media en la Comunidad Canaria.

Nuestro primer espacio será Revista de Derecho. Continuaremos con informativo universitario y por último, como es habitual, con el curso de acceso. Gracias por su atención.

Que pasen una feliz noche.