

## AC 15 23

Matemáticas Especiales, guión número 22, autores varios, repaso de espacio vectorial. Emisión 9 del 4 del 80. Hagamos hoy un repaso de los conceptos estudiados en anteriores emisiones sobre espacios vectoriales, dependencia, independencia lineal, base y dimensión.

Me parece estupendo, pues estos temas resultan bastante complicados. Realmente, este capítulo es difícil, sobre todo porque la mayoría de ustedes no han estudiado nunca esta estructura algebraica. Pero no deben desanimarse, sino al contrario, hacer más y más ejercicios para ir comprendiendo cada vez mejor los conceptos.

Comencemos, si les parece, definiendo la estructura de espacio vectorial. Para definir un espacio vectorial necesitamos dos conjuntos, uno  $V$  y otro  $K$ . El conjunto  $V$  ha de tener estructura de grupo abeliano y  $K$  ha de ser cuerpo conmutativo. Además, se define una ley de composición externa del producto cartesiano de  $K$  por  $V$  en  $V$ , que cumple cuatro propiedades, dos distributivas, una asociativa y la del elemento neutro.

Si se cumple todo esto, se dice que  $V$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo  $K$ . Es decir, un conjunto  $V$  es espacio vectorial sobre el cuerpo conmutativo  $K$ , si  $V$  es un grupo abeliano y se define una ley de composición externa de  $K$  por  $V$  en  $V$ , que cumple las cuatro propiedades que has dicho antes. Muy bien, y no hay que olvidar cómo llamamos a los elementos de  $V$  y a los de  $K$ . ¿No le parece a usted? No hay que olvidar cómo llamamos a los elementos de  $V$  y a los elementos de  $K$ . Es verdad. A los elementos de  $V$  les llamaremos vectores y a los elementos de  $K$ , escalares.

Me parece que también es importante aclarar cuáles son las operaciones que tenemos definidas. Podemos realizar suma de vectores y suma de escalares, producto de escalares y producto de escalar por vector. A este producto de escalar por vector, es decir, a la ley externa, lo llamaremos producto externo.

Conviene destacar que no se ha definido en la estructura de espacio vectorial el producto de vectores. Por lo tanto, no se puede realizar esta operación. Además, como se suele designar la suma de escalares y la suma de vectores con el mismo signo, al igual que el producto de escalares y el de escalar por vector, hay que distinguir de alguna forma los vectores de los escalares.

Lo habitual es poner una raya o una flecha sobre las letras que designan los vectores. Creo que designar los vectores de esta forma es muy útil, pues se pueden distinguir de esta manera los vectores de los escalares. Así se puede diferenciar, por ejemplo, el cero que es elemento neutro del grupo abeliano  $V$ , del cero que es elemento neutro de la suma del cuerpo  $K$ . Perfectamente.

El cero con raya encima es el elemento neutro de  $V$ . El cero sin raya es el elemento neutro de la suma de  $K$ . Repasemos ahora el concepto de subespacio vectorial. ¿Quién de los dos? Yo misma puedo definirlo. Tenemos un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo conmutativo  $K$ , y sea  $M$  un

subconjunto de  $V$ . Se dice que  $M$  es subespacio vectorial de  $V$  si  $M$  es espacio vectorial sobre  $K$  respecto de las mismas leyes de composición que  $V$ . Muy bien.

No hay que olvidar que si  $M$  es subespacio de  $V$ , ha de estar definido sobre el mismo cuerpo que  $V$ . Y ya podemos ir estudiando las distintas relaciones que se pueden establecer entre los vectores de un espacio vectorial. ¿Recuerdan lo que es un sistema de vectores? Creo que me acuerdo. Llamamos sistema de vectores a todo conjunto de vectores de un espacio vectorial.

Estupendo. Podemos hablar entonces de combinación lineal de un sistema de vectores. Bueno, no sé si lo sabré explicar bien, pero me parece que la idea la tengo clara.

Pues a ver, adelante señorita. Una combinación lineal de un sistema de vectores es un vector que se obtiene de la siguiente forma. Primero, se multiplica externamente cada vector del sistema por un escalar.

Después, los vectores así obtenidos se suman, dando lugar a un vector que es el que se llama combinación lineal de los vectores del sistema. Está perfectamente expresado. ¿Quiere usted repetirlo? Vamos a ver si lo repetimos para mayor claridad todavía.

Se multiplica externamente cada vector del sistema por un escalar. Después, los vectores así obtenidos se suman, dando lugar a un vector que es el que se llama combinación lineal de los vectores del sistema. Estupendo.

Y creo que ha quedado bastante claro, ¿no? Sí, sí, desde luego. Se ve además que, dado un sistema de vectores, según multipliquemos cada vector por un escalar u otro, obtenemos una combinación lineal distinta. Es decir, hay infinitas combinaciones lineales de un sistema de vectores dado.

Esto que acaba de decir es muy interesante, y creo que todos lo entenderán. Dado un sistema de vectores, podemos hacer infinidad de combinaciones lineales de dichos vectores, sin más que cambiar los escalares por los que multiplicamos externamente a los vectores. Además, los escalares que se eligen son arbitrarios.

Se puede también multiplicar todos los vectores del sistema por un mismo escalar. Por ejemplo, por el escalar cero. Fíjense bien.

¿Qué vector combinación lineal obtenemos? No he entendido bien su pregunta. ¿Podría repetírmela? Sí, naturalmente. ¿Qué vector combinación lineal de un sistema de vectores resulta al multiplicar cada uno de los vectores del sistema por el escalar cero? Por supuesto, después de sumar los vectores así obtenidos.

Vamos a ver. Si cada vector se multiplica por el escalar cero, tenemos el vector cero. Luego, todos los vectores que se obtienen son el vector cero, que al sumarlos nos da el vector cero.

Luego, este vector combinación lineal del sistema es el vector cero. Muy bien, muy bien.

Entonces, podemos decir siempre que el vector cero es combinación lineal de cualquier sistema de vectores.

Es una deducción muy interesante. Veo que va usted comprendiendo el tema bastante mejor. ¿No es así? Sí, sí.

Estoy aclarando algunas ideas que tenía un poco confusas. Me alegro. Y espero que continúe entendiendo cada vez más.

Prosigamos con nuestro repaso. Se dice que un vector depende linealmente de un sistema de vectores si dicho vector se puede expresar como combinación lineal del sistema. Según esto, el vector cero depende linealmente de cualquier sistema de vectores.

Efectivamente. ¿Y qué podríamos definir a continuación? Pues sistema de vectores ligado. Muy bien.

Un sistema de vectores es ligado si al menos uno de los vectores del sistema depende linealmente de los restantes. Los sistemas ligados también se llaman sistemas linealmente dependientes, ¿no? Sí, sí. De las dos formas podemos designar a este tipo de sistemas de vectores.

Ligado o linealmente dependiente. Sabemos además una condición para comprobar si un sistema es ligado o no. Es una propiedad que nos da un criterio para saberlo.

Es la siguiente condición. Un sistema de vectores es ligado si, y sólo, si existe una combinación lineal de los vectores del sistema igual al vector cero y al menos uno de los escalares es distinto de cero. Vamos a repetir esta condición, señorita.

Un sistema de vectores es ligado si, y sólo, si existe una combinación lineal de los vectores del sistema igual al vector cero y al menos uno de los escalares es distinto de cero. Muy bien. Y como opuesto al sistema ligado, tenemos el sistema de vectores libre o linealmente independiente.

Un sistema de vectores es libre si, para obtener una combinación lineal de los vectores del sistema que sea el vector cero, la única posibilidad es que todos los escalares que utilizamos sean el escalar cero. Muy bien. También se puede decir que un sistema de vectores es libre si ningún vector del sistema depende linealmente de los demás.

Es decir, no se puede expresar como combinación lineal de los demás vectores del sistema. Tenemos así definidos los sistemas de vectores ligados y libres. Dado un sistema de vectores, ¿o es libre o es ligado? ¿Recuerdan lo que es un sistema de generadores? Me parece que sí.

Un sistema de vectores es sistema de generadores si se puede expresar cualquier vector del espacio como combinación lineal de dicho sistema de vectores. Es decir, si todo vector del espacio vectorial depende linealmente de dicho sistema. Perfectamente.

Y ahora podemos definir el concepto de base de un espacio vectorial. Una base de un espacio vectorial es un sistema de vectores que cumple dos condiciones. Primera, es un sistema libre.

Segunda, es un sistema de generadores. Podemos resumirlo diciendo que una base es un sistema de generadores libre. Estupendo.

¿Y cuántas bases tiene un espacio vectorial? Todo sistema que sea de generadores y además libre es una base. Luego, hay muchas bases en un espacio vectorial. Además, todas las bases tienen el mismo número de elementos, ¿no? Exactamente.

Y además, el máximo número de vectores libres de un espacio vectorial es el número de vectores de cualquiera de sus bases. Bien. ¿Y cómo llamamos al número de vectores que tienen todas las bases de un espacio vectorial? Al número de vectores de cualquiera de las bases de un espacio vectorial se llama dimensión del espacio vectorial.

Muy bien. Con esto, damos por finalizado este importante tema del espacio vectorial. Esperamos que estas emisiones les hayan ayudado a comprenderlo mejor.

¡Suscríbete al canal!