

AC 15 68

Saludos, buenas noches, entramos en el tiempo del curso de Acceso Digital. Esta noche en nuestro programa Matemáticas Especiales, la asignatura de Matemáticas Especiales es una introducción a la matemática de los primeros cursos de Facultades de Ciencias, Facultades de Económicas y Empresariales, Escuela de Informática y Escuelas Técnicas Superiores. El objetivo general de esta asignatura es conseguir que los alumnos adquieran los conocimientos básicos necesarios para acometer el estudio de la matemática superior.

Pues bien, esta noche en nuestro programa de Matemáticas Especiales nos acompañan los profesores Arturo Fernández Arias y José Leandro de María, con los que comentaremos los temas que van del 23 al 26. Comenzamos nuestro programa de Matemáticas Especiales en la compañía de los profesores José Leandro de María y Arturo Fernández Arias. Muy buenas noches a los dos.

Buenas noches. Hola, buenas noches. Vamos a ver los temas 24, 25, 26 y 27.

Estos temas son quizá algo más complicados, por lo que recomendamos a los alumnos que graben estos programas. Es conveniente que los graben y luego los oigan detenidamente, porque quizá en una primera audición les sea difícil captar algunos conceptos. ¿Es así, verdad? Sí.

Esta noche nos tenemos que ver, como continuación de la sesión anterior, con el concepto de derivada. La derivada es un límite, de nuevo, que vimos que era el concepto fundamental del análisis. Pero en este caso lo que nos interesa es estudiar el crecimiento, decrecimiento y la forma de alguna función.

Una función derivable avanzamos es una función más específica, más concreta, con más propiedades que una función continua. De hecho, es importante saber que si una función es derivable en un punto, es continua en dicho punto. Es decir, es un concepto más restrictivo, pero por tanto más rico.

Vamos a comentar un poco, y un poco la dificultad que tenemos, y por lo cual Isabel ha aconsejado que por lo menos tengáis presentes el libro, el concepto de derivada. El concepto de derivada tiene dos aproximaciones, una analítica, definida vía el límite, y otra geométrica, mucho más intuitiva. La visión analítica es la siguiente.

Dada una función definida en un intervalo AB , donde A puede ser el número 0 y B el número 1, por ejemplo, para entendernos, diremos que es derivable en un punto intermedio entre 0 y 1 cuando el límite de, vamos a crear el punto, por ejemplo, 1 medio, cuando el límite de 1 medio más h , menos f de 1 medio, partido por h , tiende a 0, perdón, tiende a la derivada de la función en el punto 1 medio, cuando sh tiende a 0. ¿Qué es lo que viene a significar? Pues imaginémosnos la gráfica de la función, y que hemos cogido dos puntos alrededor del punto 1 medio, trazamos la cuerda que va desde un punto de la gráfica al otro punto, y dividimos por la

longitud del intervalo que existe. Cuando eso tiende a 0, justamente lo que queda es la derivada de la función, un número que será la derivada de la función. La derivada tiene el significado de que es la inclinación que tiene la gráfica con respecto al semieje positivo de abscisas.

Llegamos, por tanto, a la visión geométrica. La visión geométrica de la derivada es la pendiente que tiene la recta tangente a la gráfica en dicho punto, es decir, la recta que soporta a la gráfica en dicho punto tiene una inclinación, que es la tangente del ángulo que forma con el semieje positivo de abscisas. El concepto yo comprendo que dicho así es un poco más complicado, pero nos viene a dar la idea de lo deprisa que crece la función o la inclinación que tiene la función, la tendencia de crecimiento de la función.

Esto es básicamente el concepto de derivada. Es un concepto muy importante también. Sí, evidentemente es un concepto importantísimo.

De hecho, nos permite, la vez anterior, Arturo nos comentaba, por ejemplo, que una función continua en un intervalo cerrado y acotado, de la forma $0-1$, que es el que venimos poniendo como ejemplo siempre, pues siempre ha alcanzado un máximo y un mínimo, al menos. Bueno, pues, pero ese teorema, el teorema de Weierstrass, no nos permitía calcular dónde estaba ese punto. Bueno, pues la derivada nos va a permitir encontrar cuáles son los puntos en donde la función alcanza el máximo y cuáles son los puntos en donde la función alcanza el mínimo.

Esto es un avance importante porque de otra forma no sería posible. ¿Y en cuanto al cálculo de derivadas? Bueno, pues este es el otro aspecto importante de esta cuestión. Por un lado, hay que saber, entender bien este concepto central, que es el concepto de derivada, pero por otro lado hay que saber cómo calcular derivadas.

No podemos olvidar ninguno de los dos aspectos. Hay que entender el concepto de derivada y hay que saber calcular derivadas. Las dos cosas son importantes.

Hay algunas personas que se creen que saber lo que es una derivada es saberse hacer derivadas de forma práctica, etcétera, y hay otras personas que entienden el concepto, que entienden el concepto de derivada y se creen que se ha acabado. No, hay que entender lo que es la derivada y hay que calcular derivadas. Son dos cosas muy importantes las dos.

Entonces, para el cálculo de derivadas hay reglas, efectivamente, igual que en los cálculos de límites, que permiten calcular la derivada de funciones complicadas en términos de las derivadas de funciones sencillas. Bueno, pues como teníamos entonces para los límites, aquí también tenemos que la derivada de una función que es suma de dos funciones, si cada una de esas funciones sumando son derivables, la función suma también es derivable y la derivada de la suma es la suma de las derivadas, análogamente para la diferencia, análogamente para... Bueno, el producto aquí ya es muy distinto. El producto ya... Existe una regla muy específica para derivar el producto de dos funciones.

Remarco que la derivada del producto no es el producto de las derivadas. La regla es específica y es la siguiente. La derivada del producto de funciones es la derivada de la primera función por la segunda función sin derivar, más la derivada de la segunda función por la primera función sin derivar.

En cuanto al cociente ocurre lo mismo. Remarcamos que la derivada del cociente no es el cociente de las derivadas. El cociente también tiene una regla específica que el alumno puede mirar con detalle y con detenimiento en el libro.

Desde luego, como hemos dicho desde el principio, estos conceptos son más difíciles, quizás. Lo que yo he entendido es que la suma no tiene una regla especial, sin embargo el producto y el cociente sí. Es así.

Así es. Así es. Muy importante remarcarlo.

Y por último, aparte de estas reglas que siguen un paralelismo con el cálculo de límites en algún aspecto, por ejemplo para la suma y para la diferencia, por último hay una regla fundamental que es la llamada regla de la cadena y que se refiere a la composición de funciones. Esta es una regla fundamental y que va a ser de continuo uso en el cálculo de derivadas. Nos dice esencialmente que si una función es composición de 2 , f compuesto con g , entonces la derivada de la composición la podemos hallar en términos de las derivadas de f' y g' evaluándolos en los puntos adecuados.

Esto es una regla fundamental, repito, que se va a permitir calcular la derivada de una enormidad de funciones en términos de funciones simples, de las funciones más elementales como pueden ser los polinomios, el seno, el coseno, etc. De hecho, gracias a la regla de la cadena, el cálculo de derivadas, la derivación, es un algoritmo sencillo que no cuesta demasiado al alumno entender. No así ocurre, desafortunadamente, con el cálculo integral que veremos más adelante.

Bien podemos pasar al tema número 25. En el programa anterior vimos que existían teoremas importantes de funciones continuas. ¿Ocurre lo mismo con las funciones derivadas? Sí efectivamente.

Vamos a destacar que toda función derivable es continua, por tanto si una función es derivable en todo el intervalo, va a ser continua en todo el intervalo. Entonces ahí ya podemos aplicar los teoremas que en el programa anterior vimos, el teorema de Bolzano, el teorema de Ballestras, el teorema de los valores intermedios, pero claro, como esas son funciones con muchas más propiedades que las funciones continuas, pues tienen sus teoremas particulares y muy importantes. Por ejemplo, vamos a hablar del teorema de Rolle.

El teorema de Rolle formalmente dice que, dado una función continua en un intervalo de la forma AB cerrado y que es derivable en el intervalo abierto AB y que tiene en esos extremos de los intervalos el mismo valor, pues al menos existe un punto intermedio de tal manera que se

prima, o sea, la derivada de la función en dicho punto estero. Vamos a verlo de una forma un pelín más visual dentro de las posibilidades que tenemos. Imaginemos una función que toca suelo en dos puntos distintos y trazamos una línea desde el mismo punto a la misma altura, por ejemplo, el eje de las X, una línea continua y derivable, que no tenga picos, que es la idea básica de ser derivable, de un punto a otro.

Practicando unas cuantas veces nos daremos cuenta que siempre pasamos por una cima de una montaña o por un valle, por una ondonada. Ese punto, que es un punto que tiene tangente paralela al eje de las X, eso es ser la derivada, como comentábamos cuando era como vista desde el punto de vista geométrico, es decir, de la tangente, pues justamente es lo que asegura el teorema de Rolle. Al menos existe un punto en el cual la tangente es paralela al eje de las X. Esto es el equivalente a que si esta o la cima de una montaña o el valle, el punto bajo de un valle.

Puede ocurrir varias veces, es decir, puede haber varios de este tipo, pero al menos asegura que hay uno. Y a veces se puede, si la función no tiene una expresión excesivamente complicada, calcular bien perfectamente o bien por algún método de aproximación. Bueno, de forma directamente relacionada con el teorema anterior del que ha hablado Pepe, del teorema de Rolle, existe otro teorema, el teorema del valor medio.

El teorema de Rolle tiene la interpretación geométrica sencilla de que si una función se anula en dos puntos, bueno, pues existe un punto intermedio entre estos dos, de tal forma que la tangente es paralela al eje X. Bueno, pues el teorema del valor medio nos viene a decir que algo similar ocurre cuando, en el caso más general, dada una función que en un valor A toma un valor f de A, que en otro punto B toma el valor f de B, bueno, pues entre A y B, y si unimos estos dos puntos A f de A y B f de B de la gráfica, bueno, pues existe un punto intermedio C donde la tangente es paralela a esta recta, a este segmento. Esto, en términos precisos, se puede enunciar que dados dos puntos A y B, existe un punto, un punto C donde la derivada f' de C vale exactamente f de B menos f de A partido por B menos A, puesto que este número representa la pendiente de este segmento que hablaba uniendo los puntos extremos de la gráfica, A f de A, f de B. Pues decir que existe un punto intermedio tal que la tangente es paralela a esta recta, es decir, que en este punto intermedio la pendiente de esa recta, de la tangente, que es la derivada, es igual a la pendiente de la otra recta. Bueno, una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente hecho fundamental, es que si la derivada de una función es idénticamente cero en un intervalo, esa función ha de ser constante.

¿De dónde se deduce esto? Bueno, pues se deduce simplemente del hecho que si la función, si la derivada es idénticamente cero, del teorema del valor medio, dados dos puntos cualesquiera, A y B, pues debemos tener que f de B menos f de A, partido por B menos A, es igual a f' en un punto intermedio, en un punto intermedio C, pero en ese punto intermedio C, f' ha de ser cero, luego esta fracción ha de ser cero, por tanto el numerador f de B menos f de A es igual a cero, y eso equivale a decir que f en A ha de valer lo mismo que f en B, y puesto que A y B son arbitrarios, pues esto es cierto en general, f toma un único valor en todos los puntos. Sí,

yo quería decir que, como verán, el consejo que hemos dado previamente de que se tuviese más o menos el libro delante es obvio, porque hace falta para seguir estas explicaciones un poco ver las gráficas de las funciones, y aconsejamos que se haga, si está grabado, pues que se vuelva a oír con el libro delante y viendo lo que estamos intentando explicar, con un poco de dificultad a la materia. El cálculo de derivadas nos da una herramienta muy importante en el cálculo de límites, pero ¿cuál es esta herramienta? Bueno, es la famosísima regla del hospital.

En la regla del hospital lo que hace es que en determinadas circunstancias nos sirve para calcular el límite del cociente de dos funciones. Cuando se calcula el límite de dos funciones puede ocurrir el hecho, un poco patológico, de que quede una indeterminación de la forma infinito partido por infinito o de la forma cero partido por cero. Bueno, resolver esa indeterminación, cuando estas funciones que forman la fracción, el cociente de las dos funciones, son derivables, entonces nos permite calcular el límite de dicha fracción, sencillamente calculando el límite de la derivada de la primera partido por la derivada de la segunda.

Esta es una herramienta útil y si se sabe utilizar puede ser aplicado al cociente de dos sucesiones. Muchas veces el término n de la sucesión en el que hablamos del programa anterior no se puede calcular por métodos sencillos y entendiendo esas sucesiones como funciones, o lo que es lo mismo, entendiendo la variable n como una variable x , podríamos decir como una variable continua x , pues la utilización de la regla del hospital nos permite calcular el límite. La forma más clara para ver la utilidad de la regla del hospital es que el alumno, el oyente, el estudioso del libro, pues practique, y eso lo tiene multitud de ejemplos en el libro, tanto de teoría como de problemas, y en cualquier otro libro de análisis o cálculo infinitesimal que tenga a mano.

Se verá que en cualquiera de ellos, en los más clásicos o más antiguos se destaca especialmente esta regla. Las derivadas tienen muchas propiedades, pero en el cálculo de las funciones, ¿para qué sirve? Bueno, efectivamente, la derivada tiene muchas aplicaciones, y aplicaciones además de orden práctico en muchas ocasiones. Por ejemplo, en el cálculo de máximos y mínimos aparecen problemas en la física, cuyo modelo es literalmente calcularse el máximo y el mínimo de una función.

Por ejemplo, si nos dan la velocidad en función del tiempo, calcularse el instante en que tiene un cuerpo velocidad máxima, o cuando se sabe la regla que liga la temperatura con la longitud de una varilla metálica, pues saber a qué temperatura la longitud es máxima, todo esto responde a un modelo de problema del análisis que es el cálculo de máximos y mínimos de funciones. Esto encuentra su solución muy completa dentro del cálculo del estudio de las derivadas. Entonces podemos decir la regla de que una función, si una función tiene un máximo o un mínimo en un punto, esos puntos son tales que su derivada es cero.

Esta es una regla fundamental. El inverso no es cierto, o sea, es que la derivada sea cero no nos asegura que haya máximo y mínimo. Para eso hay unos criterios más delicados que atienden a

lo que ocurre con las derivadas siguientes.

Bueno, pero limitándonos ya al campo del estudio de las funciones, que es en el que estamos, y olvidándonos un poco del aspecto práctico, pues el cálculo de derivadas, por medio, por ejemplo, del cálculo de máximos y mínimos, y del estudio de la convexidad y concavidad, nos permite dar un estudio muy preciso y muy aproximado de las gráficas de las funciones, del comportamiento de las funciones. Por ejemplo, las propiedades de concavidad y convexidad, una función se dice que es convexa, bueno, pues cuando, digámoslo así, en términos un poco imprecisos, la gráfica de la función mira en la dirección, en dirección superior hacia el eje x , y concava cuando mire hacia abajo. Bueno, sería el equivalente a una montaña o un valle.

Convexa sería un valle, concava sería una montaña, ¿verdad? Sí, muy bien, esos son los términos más ilustrativos. Entonces, las condiciones en términos de derivadas son muy sencillas. La función será convexa cuando la segunda derivada en el punto sea positiva, la función será cóncava cuando la segunda derivada sea negativa.

Otros elementos que permiten estudiar de forma muy precisa las gráficas de las funciones, ver cómo se comportan las funciones, es el estudio de las asíntotas, que pueden ser verticales, horizontales, oblicuas, y que también encuentran su estudio dentro del marco del cálculo de derivadas. Y entramos en los temas 26 y 27. Continuamos hablando de funciones, pero hay aquí funciones quizá más complicadas, pero también más interesantes.

Sí, justamente estos dos temas se dedican a introducir las funciones más habituales, más importantes del análisis. Básicamente haciendo una lista son las funciones denominadas trigonométricas, seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, las inversas de estas funciones, y finalmente en el otro tema, en el 27, la función logaritmo y la función exponencial. Voy a hablar un poco de la función seno.

La función seno es, ya hemos definido en el libro lo que es el seno de una función, es el cateto opuesto partido por la hipotenusa, el seno de un ángulo en un triángulo rectángulo. Si dividimos el cateto opuesto por la hipotenusa, por la longitud de la hipotenusa, obtenemos el seno. Esto se puede extender a cualquier valor, es decir, para cada valor del ángulo damos un valor del seno.

Si vemos una representación sobre una circunferencia unidad, vemos que cada 2π , que es la longitud de una circunferencia, o cada 360 grados, si lo queremos ver en grados, se va repitiendo otra vez el valor del seno para esos valores. Este es el concepto de función periódica. Una función periódica es aquella que tiene un periodo y esto significa que la función vale lo mismo si le sumamos a la x ese periodo.

Hay multitud de fenómenos físicos, yo me atrevería a decir que casi todos, los más habituales, que se rigen por las leyes de oscilación, es decir, por leyes que llevan dentro de sus fórmulas el seno o el coseno. Las propiedades de la función seno son muy importantes, son funciones continuas, se demuestra con relativa facilidad, son funciones derivables, y desde luego

aconsejamos que también se estudie esto de una forma un poco detenida. Es muy muy importante que el alumno observe bien y aprenda las gráficas de las funciones, porque la gráfica de la función, la idea intuitiva que representa la gráfica de una función, se pueden sacar multitud de propiedades de la función.

Análogamente a la función seno, de hecho es un desplazamiento de estas, la función coseno, es otra función trigonométrica, que en definitiva es parecida a la del seno, sumado una cierta cantidad, π medios en concreto, y la tangente es justamente la función seno partido por coseno. Como la función coseno tiene unos ciertos puntos en los que se anula, pues en los puntos π medios, pues por ejemplo, hay una asíntota vertical, puesto que la función seno no se anula, y una vez dividiríamos por cero, pero esta vez como el numerador no se anula, se haría infinito, a eso llamaríamos una asíntota vertical. Y bueno, se van dando las propiedades que tienen estas funciones, las propiedades que tienen de continuidad, de derivabilidad, y es muy importante, importantísimo para el cálculo, conocer cuáles son las derivadas de las funciones.

Entre ellas están muy relacionadas, por ejemplo, la función seno tiene por derivada el coseno, la función coseno tiene por derivada lo opuesto, menos el seno. La función tangente es uno partido por el coseno cuadrado, y así se van estudiando, no creo que sea necesariamente necesario describir aquí todas las propiedades que tienen, son muchísimas, pero bueno, se van estudiando propiedades importantes. Hay una fórmula que yo quiero destacar, creo que se estudia previamente en el libro, pero creo que conviene que la comentemos, y es un hecho importantísimo, y es que el coseno cuadrado más un valor x más el seno cuadrado de ese mismo valor, da siempre uno.

A partir de ahí, esto es una fórmula fundamental en la matemática y que tiene una utilidad absoluta en las aplicaciones, entre otras en el cálculo de primitividad, de lo cual hablaremos en el programa siguiente. No sé si Arturo quiere añadir alguna cosa sobre las funciones trigonométricas. Bueno, no, esto es básicamente lo que ha dicho Pepe, yo creo que describe muy bien de una forma introductoria.

Simplemente decir que el seno y el coseno, el alumno podrá ver que los hemos introducido de una forma intuitiva, utilizando pues un poco la definición elemental basado en los triángulos, pero que admite una definición más precisa en el análisis, pero simplemente que el alumno conozca este hecho, pero que realmente en este nivel, la introducción basada en términos de los catetos de un triángulo rectángulo es la más adecuada. Bueno, a continuación vamos a hablar de otras funciones elementales, otras funciones elementales muy importantes también, quizá las siguientes en importancia detrás de las funciones trigonométricas, que son, bueno, pues la función exponencial y potencial y la función inversa de la función exponencial, que es la llamada función logarítmica. Bueno, introduciremos también estas funciones de una forma elemental, no del todo precisa, pero que creemos que es la forma más adecuada a este nivel.

Bueno, pues en principio suponemos lo que significa, dados los números reales, lo que es la expresión a elevado a ℓ . Esta expresión es muy sencilla en casos, por ejemplo, si los dos son

números naturales, por ejemplo, todos sabemos lo que es 2 elevado a 3, pues es multiplicar tres veces el 2 por sí mismo, es 2 por 2 por 2, pero no es tan sencillo, por ejemplo, la expresión 2 elevado a π . No vamos a entrar en este tema, sin embargo, recomendamos alumnos que mediten un poco sobre qué podría significar esta expresión.

Bueno, suponiendo que ya sabemos lo que significa a elevado a b , podemos considerar al número a se le llama la base de esta potencia, al número b se le llama exponente, pues podríamos considerar la base fija, a , y hacer variable el exponente. Entonces obtendríamos una función que sería i igual a a elevado a x . Esto es lo que se llama la función exponencial de base a . También podríamos considerar fijo el exponente, b , y hacer variable la base, x . Entonces obtendríamos la función i igual a x elevado a b , que es lo que se llama la función potencial. Bueno, pues estos son funciones que se puede probar por métodos no muy complicados, que son funciones continuas y derivables, y cuyo comportamiento no es siempre el mismo, depende de a y b . Por ejemplo, la función exponencial es creciente cuando a es mayor que 1, y decreciente para a menor que 1. Esto es una cosa muy importante, la función exponencial no tiene el mismo comportamiento siempre, depende de la base.

Otra propiedad muy importante de la función exponencial es que a elevado a x_1 más x_2 es igual a a elevado a x_1 por a elevado a x_2 . La función potencial satisface otra propiedad muy importante, análoga a la anterior en algún sentido, que es x_1 por x_2 elevado a b igual a x_1 elevado a b por x_2 elevado a b . Bueno, como decía antes, son funciones continuas y derivables, se puede comprobar sin demasiada dificultad, y entonces simplemente enunciar quiénes son sus derivadas. La derivada de una función exponencial es la misma función exponencial, pero multiplicado por el logaritmo de la base, es decir, a elevado a x prima, su derivada es igual a a elevado a x por el logaritmo de a , por el logaritmo neperiano.

Y también la derivada de la función potencial, x elevado a b , es otra función potencial multiplicado por un coeficiente. De forma más precisa, la derivada de x elevado a b es b por x elevado a b menos 1. Para terminar esta sección, introduciremos la función logarítmica, la función logaritmo o función logarítmica, que es como la función inversa de la función exponencial. Como función inversa de una función continua y derivable, pues es también continua y derivable.

Simplemente decir que la derivada del logaritmo es 1 partido por x , la derivada del logaritmo neperiano de x es 1 partido por x . Los logaritmos neperianos son aquellos en que la base es el número e . Bien, hemos visto los temas 24, 25, 26 y 27. Si en el programa anterior ya decíamos que se complicaba quizá algo la materia, ahora parece que se complica todavía un poquito más. Subimos otro peldaño, ¿es así? Bueno, son dificultades de orden diferente.

Yo creo que conceptualmente era más difícil, era más difícil incluso el capítulo anterior. Esta es una dificultad de orden técnico. Estas definiciones que hemos dado no pueden ser totalmente precisas, no pueden ser totalmente precisas porque nos faltan algunas herramientas, pero las herramientas que, una vez definidas esas herramientas, estos conceptos no deberían ser tan

complicados.

Yo creo que el capítulo anterior, los conceptos de límite y de derivada son realmente complicados y requieren una reflexión y maduración incluso mayor que lo que hemos hablado en este capítulo. Pepe, para el estudio de esta parte, lo mismo que decimos siempre, el mismo consejo, primero aprender conceptos y después practicar. Efectivamente.

A derivar se aprende derivando y realmente lo que tiene que hacer el alumno es entender los conceptos. Es necesario, por lo menos, tener las ideas claras y luego hacer mucha práctica. Comprobará que a pesar de la dificultad de esta emisión, realmente luego la práctica es mucho más sencilla porque es un algoritmo, hay que destacarlo.

En el próximo programa destacaremos que no lo es el cálculo integral elemental, pero en cambio esto sí es un algoritmo. La dificultad que puede haber entendido en el programa es que la descripción, vía solamente la voz, tiene más dificultades que si lo hubiéramos hecho con una posible pizarra o algo así. Él verá que las cuestiones evidentemente son cuestiones de análisis, son cuestiones complicadas y que se han estudiado durante mucho tiempo, pero aprenderá fácilmente a derivar, incluso encontrará cierta satisfacción en hacer ejercicios y comprobará que es muy divertido.

Le aconsejamos sobre todo que represente muchas gráficas. Es una cosa muy divertida y que le gustará hacerlo. Pues muchas gracias a los dos, muy buenas noches y hasta el próximo programa.

Buenas noches. Muchas gracias. La UNED les ha ofrecido dos horas y media de radio educativa y cultural.

Mañana estaremos de nuevo con ustedes en esta misma emisora y a nuestra hora habitual. Nuestro primer espacio será Revista de Derecho. Continuaremos con el informativo universitario y por último el curso de acceso.

Gracias por acompañarnos, muy buenas noches. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org