

AC 15 81

Hola, buenas noches, bienvenidos en este domingo 7 de noviembre al tiempo del curso de acceso directo a la universidad para mayores de 25 años, el CAT. Esta noche en nuestro programa tres espacios con tres temas bien diferentes. Comenzaremos con matemáticas especiales comentando los temas del 1 al 3 que nos hablan de números y conjuntos.

Continuaremos con literatura española. Hablaremos de la prosa cervantina, de la imagen de Cervantes y de su obra rinconete y cortadillo. Nuestro último espacio estará dedicado a la historia del mundo contemporáneo.

Hablaremos con la profesora Lucia Rivas de las revoluciones industriales y de sus consecuencias sociales. Y ahora sí, ya comenzamos con matemáticas especiales. Esta noche en matemáticas especiales nos acompaña el profesor Pedro Jiménez Guerra.

Muy buenas noches. Muy buenas noches a todos. Vamos a hablar de los temas que van del 1 al 3, es así, ¿verdad? Perfecto.

Bien, ¿de qué tratan esos temas? Bueno, pues mira, esta noche vamos a hablar básicamente de números, conjuntos y aplicaciones. Bien, vamos a hablar de los números, pero ¿de dónde surge la idea de número? Bueno, mira, la idea de número surge como resultado de comparar una cantidad con otra. Es decir, como consecuencia de medir una cantidad que a fin de cuentas es compararla con otra que llamamos unidad.

Y agregando unidades formamos cantidades que representamos por números. Mira, por ejemplo, el hombre cuando se hizo ganadero pues metía a su rebaño por la noche en el cercado y entonces pues a medida que entraba un animal el hombre iba cogiendo una piedrecita o un palo, ¿no? Y a la mañana siguiente pues tiraba, según salía un animal, tiraba la piedrecita correspondiente. Si al final no le quedaba ningún animal y ninguna piedrecita era correcto.

Si le quedaba una piedrecita, pues caray, alguien se había llevado un animal, ¿no? Luego, cuando el hombre se hizo agricultor, pues realmente se planteó el problema de medir superficies, ¿no? Entonces, por ejemplo, en el Nilo, ¿sabes? Que la zona más productiva era la que está a las orillas del río, pero tiene crecidas, con lo cual realmente la crecida desbarataba todos los lindes y había que volver a darle luego a cada uno precisamente la tierra que tenía. Había que medir, ¿no? Luego, por ejemplo, con el comercio, los fenicios, ¿no? Pues realmente los fenicios negociaban y entonces había que ver qué cuánta cantidad te daban, ¿no? Y había que empezar a medir volúmenes, ¿no? Y así sucesivamente. Pero bueno, el origen realmente del concepto de número es muy difícil de descubrir hasta el punto de que se experimenta una sensación de bienestar cuando se deja de lado su investigación.

Es una idea muy extendida la de que se opone que el concepto de número está estrechamente unido al de tiempo, dependiendo ambos de una impresión que despierta en nosotros la

sucesión de fenómenos que se verifica a nuestro alrededor y en nosotros mismos. Esto, por ejemplo, lo pensaban filósofos como Kant o Hamilton. Luego, en cambio, hay otra corriente que dice que la idea de número tiene más que ver con el concepto de espacio, reduciendo el concepto de número a la simultánea contemplación de diferentes objetos considerados en su conjunto.

Y bueno, como no podía ser menos, por último, hay también quienes ven en las representaciones de los números la expresión de una especial actitud de espíritu, como por ejemplo hace el matemático Minkowski. De todas formas, los números han tenido un proceso y una evolución en su descubrimiento y en su utilización. Por ejemplo, la historia de los números negativos muestra que los antiguos griegos no tuvieron noción de ellas, de modo que en este punto no se les puede asignar el primer lugar como muchos hacen.

Por el contrario, puede asegurarse que sus descubridores son los indios, a quienes también se deben el cero y el sistema de numeración decimal. De todas formas, en Europa, por ejemplo, los números negativos empezaron a usarse en la época del Renacimiento, siendo su introducción muy lenta, aunque ya algunos matemáticos como Vieta los habían utilizado completamente. Como vemos, algunas cosas son intuitivamente muy antiguas, pero su formalización ha llevado bastantes siglos.

El número, por tanto, tiene su historia, desde luego. Tiene una gran historia también. ¿Y cómo se distribuyen? Bueno, pues en el capítulo 1, ahora que me haces esa pregunta, aprovecho para volver un poco al tema, y en el capítulo 1 vamos a estudiar los números enteros y racionales.

Introducimos al alumno en algunos resultados básicos de los números enteros y también de los racionales, comenzando con las operaciones básicas de los enteros. Se dan los criterios de divisibilidad de un número entero por 2, 3 y 5, para seguir posteriormente con el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Debe de tenerse en cuenta que durante mucho tiempo se ha sumado y multiplicado sin que hubiera leyes formales para estas operaciones, y parece que es una cosa de siempre, pero bueno, ha sido a comienzos del siglo XIX cuando se empezaron a estudiar las propiedades formales de estas operaciones.

Así, por ejemplo, Peano estableció una descripción axiomática de los números naturales con 5 axiomas, que se conocen con los axiomas de Peano, pero eso sí, en el siglo XIX. Y también, por ejemplo, otros de los pioneros fueron Russell y Whitehead. De todas formas, la formalización es muy muy muy difícil.

Baste como botón de muestra comprobar que en los elementos de matemáticas de Burbaki se demuestra que $1 + 1 = 2$, que esto nos parece una trivialidad, ¿no? Pues $1 + 1 = 2$. Hay algunos que dicen que $1 + 1$ lo quería el jefe, pues no, $1 + 1 = 2$, ¿no? Y realmente, para poder hacer esto, hay que estudiar el número 1, que por cierto, no aparece hasta que uno ha leído más de 200 páginas, ¿no? O sea, que eso nos da un poco idea de lo difícil que es. Bueno, siguiendo con tu pregunta, después de estudiar los números enteros, que son los naturales, positivos y negativos, se establecen después los números racionales, que surgen de forma

natural como cociente de números enteros, donde el entero en el denominador es distinto de cero. Y también, para estos números, estudiamos sus operaciones básicas, suma, diferencia, producto y cociente, y se termina el tema viendo la expresión decimal de un número racional.

Posteriormente, bueno, no sé si querías hacerme alguna pregunta de los números reales. No, no, simplemente decir eso, precisamente, que nos introducimos ya en el tema 2, ¿no?, que son los números reales. El tema 2 son los números reales, efectivamente.

Y bueno, pues en este tema realmente se estudian las propiedades de los números reales, sus propiedades, se estudian también las desigualdades, el concepto de valor absoluto, que sirve para introducir el concepto de intervalo, después se analizarán las potencias de los números reales y finalmente se estudian las ecuaciones e inequaciones de una variable y las ecuaciones de segundo grado. Bien, ¿siempre se han utilizado los mismos símbolos? Pues mira, los símbolos se han ido introduciendo a lo largo... los símbolos que hemos ido introduciendo a lo largo del tema han tenido también, como era lógico, un desarrollo histórico. Así, por ejemplo, los símbolos más y menos fueron introducidos por Wiesman, en un libro que apareció publicado en 1489, es decir, en el siglo XV.

El símbolo del producto fue establecido por Outhet en el año 1657, en el siglo XVII. El símbolo dos puntos para la división fue introducido por Rand, también en ese siglo, en el año 1659. El símbolo igual, por ejemplo, lo estableció Recorde a principios del siglo XVI.

Los símbolos estrictamente mayor y estrictamente menor fueron introducidos por Harriot a finales del siglo XVI. La denominación de exponente apareció por primera vez en 1544, en un trabajo de Striffen. Y finalmente el símbolo raíz, para la raíz, fue introducido por Rudolph en 1525.

Y es una variante de la letra R, primera letra de la palabra latina ratis, que significa raíz. Que si veis la R, pues estirando una de las partes, pues sale realmente una raíz. Y así es cómo se han salido, cómo se han ido inventando, evolucionando y perfeccionando los símbolos que hoy día utilizamos.

En este tema también se estudian los logaritmos, pero ¿son los logaritmos una cuestión reciente? Bueno, vamos a ver, si me lo permites, con respecto a los logaritmos, me gustaría decir que en este tema se hace una introducción a los logaritmos, ya que luego, tan sólo una introducción, ya que luego se van a estudiar de forma mucho más rigurosa en el tema 27. Ahora, volviendo a tu pregunta, pues mira, te querría decir que los logaritmos también son relativamente recientes. Los logaritmos fueron descubiertos por el matemático escocés Napier, que vivió entre los 1550 y 1617.

Y él, en unas notas de sus primeros años, escribía una tabla en la que en la parte superior había los números en cifras romanas y abajo en cifras en las que nosotros utilizamos, las arábigas. Entonces, los números romanos representaban el logaritmo en base 2 del número correspondiente a la parte inferior. Y en 1615, Briggs le dijo a Napier que debería utilizar el

número 10 como base para los logaritmos, porque Napier, aunque había empezado de otra forma, realmente también él mismo descubrió la importancia de los logaritmos en base 10, debido a que el sistema decimal, que es el que normalmente se empleaba.

Bueno, pues durante 25 años estuvo realizando una tabla de logaritmos en base 10. Fíjate, 25 años, ¿no? Es que no tenían ordenadores. Bueno, pues cuando la tabla fue completada, causó una impresión enorme entre los científicos europeos.

Y bueno, como no pudo ser menos, inmediatamente fue utilizada por muchos científicos, entre otros dos grandes astrónomos, como fueron Brahe y Kepler, ¿no? Bien, ¿acabaríamos este tema con esto o tenemos algo más que decir? Bueno, yo creo que el tema lo podríamos dar por terminado con esto. Eso sí, volviendo a insistir, realmente se trata de cuestiones básicas que el alumno va a manejar. Bueno, eso se ve que parece un tópico decir que son básicas, pero son ideas, la idea de los números, son ideas que el alumno va a utilizar a lo largo de todo el curso.

Sí que querría decir una cosa, ¿no? Que el alumno tenga claro que aparecen primero los números naturales, el 1, 2, 3, 4. Posteriormente, ya hemos comentado antes su origen, los números negativos, que junto con los naturales dan origen a los enteros. Al dividir, al hacer cocientes entre números enteros, con el denominador distinto de cero, aparecen los números racionales. Pero cuando uno, por ejemplo, piensa que ahí ya está todo, por ejemplo, uno pues tiene la idea intuitiva de la suma, ¿no? Una cesta que tiene tres manzanas, otra pues tengo cuatro manzanas.

También el producto, ¿no? Si una pera vale tres pesetas, pues cinco peras valen 15 pesetas. Cuando uno tiene una tarta y la quiere dividir en trocitos, la quiere trocear, pues quiere saber a cuánto toca cada uno el cociente, ¿no? Parece que ahí habríamos acabado, pues no. Por ejemplo, que esto ya es un teorema ligado a los griegos, ¿no? Todos sabemos que si consideramos un triángulo rectángulo, pues la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Bueno, pues imaginemos un triángulo rectángulo cuyos dos catetos valgan uno. ¿Cuánto vale la longitud de la hipotenusa? Pues vale raíz de dos, pero raíz de dos no es ninguno de los números que hemos dicho antes. Y lo mismo pasa con otros números como el número pi, ¿no? Entonces, bueno, pues eso da origen a otros números que llamamos números irracionales, que juntos con todos los anteriores constituyen lo que llamamos números reales.

Y uno podría pensar que hemos acabado. Bueno, pues tampoco hemos acabado. Lo que pasa es que no lo vamos a estudiar realmente a fondo aquí, pero mirad cuando, bueno, perdón, mirad, miremos, ¿no? Cuando realmente uno resuelve ecuaciones, como por ejemplo una ecuación tan sencilla como la x cuadrado más uno igual a cero, pues realmente no tiene solución en el campo real, ¿no? Porque un número positivo más un número más el uno, que también es otro positivo, nunca puede ser igual a cero, ¿no? Porque siempre sería mayor o igual que uno.

Entonces, es que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tan sencilla, que al fin y al cabo es un polinomio de grado dos igualado a cero, una ecuación polinómica $x^2 + 1 = 0$ igual a cero, no tiene solución. Bueno, pues esto realmente si hubiera sido así, realmente estuviera impedido el desarrollo tan vertiginoso que ha tenido la matemática. Y bueno, pues para esto y para otras muchas cosas, ¿no? Realmente se han creado otros números que se denominan números complejos, ¿no? Y que el alumno tendrá ocasión de estudiar, bueno, por supuesto, si no con suficientemente detenimiento en este curso, pero sí a lo largo de su vida académica.

Sí, parece que los números hay que profundizar mucho y que algo que parece en principio muy sencillo se va complicando cada vez más. Pues sí, realmente sí. Pero eso es por las necesidades, por las necesidades del guión, ¿no? Por las necesidades de la vida.

Y podemos pasar al tema 3. El tema 3 son los elementos de la teoría de los conjuntos. Pero, ¿de cuándo vienen los conjuntos? Bueno, pues la teoría de conjuntos fue creada por Cantor, ¿no? Cantor es un matemático que vivió entre los años 1845 y 1918. Entonces, desde 1872 hasta finales del siglo XIX, la noción de conjuntos era intuitiva.

Era como colección de elementos, como colección de partes, ¿no? Y por ejemplo, el alumno puede encontrar en el texto dos definiciones diferentes, debidas a Cantor y a otro matemático que se llama Dedekind. Bueno, pues esta utilización de los conjuntos sin la ayuda de reglas precisas llevó rápidamente a la aparición de paradojas. Que, por cierto, estas paradojas no eran nuevas, ¿eh? Porque ya en el siglo IV a.C. un personaje de Euclides, que siempre miente, declara que está diciendo una mentira.

¿Es esta frase la expresión de la verdad? Pues cualquiera que sea la respuesta se llega a una contradicción. Bueno, pues una paradoja de este tipo también aparece en el Quijote de Cervantes, ¿no? Y luego, por ejemplo, con Russell, que también tiene paradojas muy famosas, pues aparece una, ¿no? Consideremos el conjunto de todos los conjuntos. Entonces, ¿ese conjunto, que es el conjunto de todos los conjuntos, es a su vez elemento de sí mismo? Bueno, pues quiere decir que con la axiomatización de la teoría de conjuntos, que se debe a Zermelo, en el año 1908, fijémonos que estamos ya en pleno siglo XX, ¿no? Pues realmente Zermelo dio una primera axiomatización, que posteriormente Frege, en el año 1922, como vemos hace ya muy poco tiempo, ¿no? Hace 75 años.

Bueno, pues con esta axiomatización, realmente las paradojas antes mencionadas desaparecen, ya que uno de los axiomas dice que ningún conjunto es elemento de sí mismo. También en este tema aparecen las aplicaciones, pero ¿las aplicaciones es algo que también aparece en la vida real o qué son exactamente las aplicaciones? Bueno, si te parece, eso lo podríamos dejar un poquito para dentro de un rato, porque me gustaría, si me lo permites, comentar un poquito más el tema de conjuntos, ¿no? O sea, hemos visto, tú me has dado pie con tu pregunta, que yo te hablara, que habláramos acerca del origen y la evolución de la historia, pero me gustaría un poco también pisar tierra y comentarle al alumno qué es lo que se va a encontrar en el tema, en los dos primeros, en las dos primeras secciones de este tema 3,

que lleva además precisamente el título de elementos de la teoría de conjuntos. Muy bien, sí, sí, por supuesto.

Bueno, pues mira, el tema se inicia primero estudiando los conjuntos y los subconjuntos. Después se estudian sus operaciones, que son unión e intersección de conjuntos, producto cartesiano de conjuntos, y por último se termina introduciendo el concepto este al que tú te has referido, que es el concepto de aplicación. Sí que me gustaría decir que las operaciones con conjuntos que se han definido cumplen muchas propiedades algebraicas que se satisfacen en los números reales.

La mayoría de ellas fueron establecidas por un matemático inglés, George Boole, que formalizó un álgebra con conjuntos presentando en la obra *Investigation of the Law of Froth*, que publicó en 1854. Bueno, pues volviendo a tu pregunta de si esto se presenta en la vida real, pues mira, realmente las matemáticas nos las encontramos constantemente en la vida real. Aparecen casi constantemente, están íntimamente ligadas a nuestra vida, y de hecho la evolución de las matemáticas también está ligada a la vida real.

Porque, por ejemplo, hoy día la investigación matemática se viene motivada por problemas que encuentran básicamente la técnica, y también la economía y otras ramas del saber hoy día ya, pero que sí, está íntimamente ligada a la vida real. Por ejemplo, mira, cuando uno se para a mirar el escaparate de una tienda, pues se ven una serie de objetos y unos carteles con el precio de cada uno de estos objetos. Bueno, pues si designamos por A al conjunto de los objetos y por B al conjunto de los precios, entonces la asignación de un precio a cada objeto establece una aplicación entre el conjunto A de los objetos y el conjunto B de los precios.

También, por ejemplo, son frecuentes en los medios de comunicación expresiones del tipo, el consumo de gasolina de una moto está en función de la velocidad de la misma, la factura mensual del teléfono está en función de los pasos del contador, el precio del billete del avión está en función de la distancia que existe entre el origen y el destino. Como vemos, realmente las funciones, también llamadas aplicaciones o viceversa, pues realmente están íntimamente ligadas a nuestra vida real. ¿Y el alumno en concreto qué estudia de las aplicaciones y de las funciones en este tema? Bueno, pues realmente se estudia el concepto de aplicación entre conjuntos y los distintos tipos de aplicaciones que se pueden dar, que son las aplicaciones inyectivas, aplicaciones subyectivas y aquellas aplicaciones que son a la vez inyectivas y subyectivas, que se denominan aplicaciones billectivas.

También estudiamos la aplicación inversa y la composición de aplicaciones. Bien, y hemos hablado de funciones, pero la palabra función, ¿qué es la palabra función? ¿De dónde viene? Pues mira, realmente la palabra función también es un concepto muy reciente, fue introducida en 1694 por Leibniz, que como todos sabemos, además de filósofo, historiador, jurista, pues fue el creador del cálculo diferencial e integral, junto con Newton. Leibniz utilizó la palabra función para denotar una cantidad asociada a una curva.

Alrededor de 1718, Bernoulli consideró la función como una expresión algebraica formada por

constantes y una variable. Posteriormente, las ecuaciones o fórmulas con constantes y variables aparecieron con Euler en el trabajo realizado hacia 1794 con Clégane. En él se encuentran ya las anotaciones f paréntesis x, que es lo que hoy día utilizamos, que todavía se usan en la actualidad.

Dirichlet estableció una formulación más rigurosa de los conceptos de variable, función y correspondencia entre la variable independiente x y la variable dependiente y , cuando y es igual a f de x . El estudio de Dirichlet destacó la relación entre dos conjuntos de números. Y en fin, con el desarrollo de la teoría de conjuntos durante los siglos XIX y XX, se estableció la generalización de función como un típico especial de aplicaciones. Bien, hemos hablado en nuestro programa de números, de conjuntos, de aplicaciones.

El alumno tendrá que saber qué es lo más importante, cómo debe estudiar estos temas, en fin, sacar todo el provecho posible a estos tres temas de los que hemos hablado. Pues en efecto, después de todo lo que hemos dicho, que sirvemos para que todos tengamos una idea general de lo que tratan estos tres primeros temas, pues sí que me gustaría añadir que los temas 1 y 2 no constituyen en sí mismos materia de examen, pero no obstante sí que recomiendo vivamente al alumno que los estudie y que profundice en ellos y que memorice también los resultados fundamentales, porque son básicos y los va a utilizar constantemente en la matemática. Por otra parte, el tema 3 dedicado a conjuntos y aplicaciones, pues éste sí que constituye materia de examen.

Y el alumno debe familiarizarse con las operaciones de conjuntos, con la unión, con el producto cartesiano, con la intersección, con la complementación, con la diferencia de conjuntos. Realmente en esto sí que debe dedicar tiempo y profundizar en ello utilizando los muchos ejemplos que existen tanto en el libro de teoría como en el libro de problemas. Y por último, pues en el tema de aplicaciones, en la cuestión de aplicaciones, el alumno, como es una cuestión bastante un poco abstracta, pues en algunos casos cuesta entenderla y por eso creo que es de gran ayuda que el alumno se ejercite con los ejemplos que se exponen después de cada definición y que se dedique tiempo a estudiar el tipo de las aplicaciones que aparecen, para que sepa bien distinguir cuando una aplicación es directiva, una pregunta puede ser, dado una función, ver si es inyectiva, en ver si es subyectiva, ver el conjunto imagen de otro conjunto por una aplicación.

Sí, yo recomiendo vivamente que el alumno estudie en los conceptos básicos que tratan los temas 1 y 2, aunque no sea el motivo de examen, y en el tema 3 que realmente memorice lo fundamental y que además ejercite lo más posible las operaciones de conjuntos y la determinación del carácter de una aplicación y las imágenes de aplicaciones mediante conjuntos, realizando cuanto más ejercicios, mejor. Aquí exactamente lo que iba a preguntar, que hay que hacer muchos ejercicios, ¿verdad?, porque es la única manera de poder no solamente entender el concepto, sino luego llevarlo a práctica. Bueno, yo siempre recuerdo una anécdota de un matemático, matemático contemporáneo nuestro, uno de los grandes padres de la matemática moderna, que decía se aprende mucho más dedicando una tarde a resolver

un problema sin resolverlo que resolviendo un problema en media hora o en un cuarto de hora o en cinco minutos.

El resolver, el intentar hacer sin desanimarse, aunque a uno no le salga, sobre todo ahora que estamos en los primeros capítulos, uno intenta hacer el ejercicio, mira el resultado, intenta ver cómo se hace en el libro el ejercicio, cómo se resuelve, y luego lo vuelve a intentar sin desanimarse, pero el intentar hacer un problema, como ya decía este matemático, pues efectivamente eso enseña muchísimo. Efectivamente ahora estamos comenzando el curso y ya tuvimos un primer programa de presentación, pero en el que se dijeron cosas que a lo mejor los alumnos todavía pues no habían empezado el curso, no habían empezado a ir a los centros asociados, y a mí me gustaría recordar algunas pues casi para acabar. La importancia de las tutorías, la importancia de ponerse en contacto desde ahora con la sede central en caso de que no puedan ir a estas tutorías, esto hay que repetirlo mucho.

Si tienen alguna duda, pues que se pongan en contacto con el profesor tutor o con el profesor de la sede central, ahora es el momento también empezar a estudiar desde ya. ¿Qué podríamos decir de todo esto? Haciendo un pequeño recordatorio de todo lo que dijimos en el primer programa, pero que es importante. Bueno, pues volviendo a insistir en esto que dices, efectivamente ahora el alumno ya se ha metido en materia y ya se empieza a encontrar con las primeras dificultades.

Pues sí, una vez más, y de eso creo que nunca nos cansaremos nadie de los que nos dedicamos a la enseñanza no presencial, a la enseñanza a distancia, es recalcar la importancia del papel del tutor. Bueno, pues ponerse manos a la obra, ya es el momento, ya el curso está comenzado. Muchas gracias y muy buenas noches.

Pues nada, muchísimo ánimo a todos los que empiezan, sin desanimarse en ningún momento y hasta la próxima. Estamos en la sintonía del curso de acceso. Continúen con nosotros.