

AC 10 80

Curso de acceso directo. Hoy, matemáticas básicas. Nos acompañará el profesor titular Víctor Hernández Morales para darnos orientaciones sobre los capítulos 10 y 11.

Prestad atención a los programas del mes de mayo para ir preparados, convenientemente orientados para los exámenes finales. Esta noche tenemos el último programa de este curso académico de matemáticas básicas en que vamos a abordar algunos temas del temario de la asignatura, del programa de la asignatura con el objetivo de orientar a los alumnos para su estudio. En concreto, los capítulos 10 y 11, puesto que el último, el 12, no se exigirá en el examen final.

Habrà otro programa dentro de unos días, cuya fecha de emisión consultáis en la guía de los medios audiovisuales, en el cual nos centraremos más pormenorizadamente en explicar cómo se desarrollará el examen final. Pero hoy, con el profesor titular Víctor Hernández Morales, como hemos dicho, vamos a orientar sobre los capítulos 10 y 11. Víctor, buenas noches.

Buenas noches. Bueno, estas dos lecciones tratan de probabilidad, ¿no es eso? Probabilidad y estadística. Y estadística.

Bueno, pues vamos a empezar por la primera de ellas, el capítulo 10. Y entonces aquí, ¿qué es lo que se aborda? ¿Qué conceptos importantes hay que dominar? Pues, en primer lugar, probabilidad, como más o menos nos suena, es algo que tiene que ver con el azar, con los sorteos y con la suerte. Y esta noción de azar, que nos resulta cada vez más familiar porque estamos bajo su influencia permanentemente, conviene de todas maneras, pues, me parece, tratar de aclararla un poquito.

Lo contrario del azar es lo que llamamos necesidad. La necesidad es, o puede ser, de dos clases. La necesidad puede ser lógica y puede ser física.

Vamos a empezar por la segunda. Con un ejemplo. Necesidad física sería, pues, la observación, el hecho de que si yo sostengo una bola en la mano y la dejo caer, la suelto, le retiro el apoyo de mi mano, esa bola cae al suelo.

Ese es un ejemplo que forma parte de algo, de una ley empírica, una ley que hemos observado repetidas veces y que nos hace pensar que siempre que hagamos ese mismo gesto de retirar la mano de la bola o soltar la bola, la bola caerá al suelo. Ni siquiera se nos pasa por la cabeza que la bola se pueda quedar flotando en el aire. De manera que esto significa que nosotros atribuimos un efecto necesario a una causa.

En este caso la causa física sería soltar la bola y el efecto que esperamos que ocurra necesariamente es que la bola caiga al suelo. ¿Y la otra necesidad, la necesidad lógica? La necesidad lógica aparece con mayor frecuencia en las matemáticas y en las ciencias de tipo deductivo. Básicamente todos los resultados, todos los teoremas o propiedades matemáticas

son ejemplos de necesidad lógica.

La necesidad lógica aparece cuando de unas premisas necesariamente se siguen unas conclusiones. Por ejemplo, sería... Una suma, una cosa tan simple como 2 más 2 igual a 4. Necesariamente esa suma tiene que dar 4. No, más que la operación es el mismo hecho implicativo de los enunciados matemáticos. Vamos a poner un ejemplo.

Todo número múltiplo de 4 es múltiplo de 2. Esa es una afirmación que realmente contiene dos partes. Una premisa que es un número es múltiplo de 4 y una conclusión necesaria, lógicamente, el número es múltiplo de 2. Siguiendo un poquito el esquema del cálculo proposicional, la manera, digamos, estricta de enunciar esto sería si un número es múltiplo de 4, entonces es múltiplo de 2. La verdad que hay contenida en esa afirmación es un ejemplo de necesidad lógica. Vuelvo a insistir en esto, aunque sea un poquito pesado.

Se sigue necesariamente, no se nos puede pasar por la cabeza, que un número que sea múltiplo de 4 no sea múltiplo de 2. Del hecho de ser múltiplo de 4, de esa causa, se sigue necesariamente el efecto de que ese número es múltiplo de 2. En todo caso, la necesidad sea física o lógica, lo importante de ella es que tenemos una certeza absoluta de que eso va a suceder, de que eso va a ocurrir, ¿no es así? Efectivamente, la necesidad implica certeza. Nosotros, cuando pensábamos en la bola que teníamos en la mano y pensábamos en soltarla, pues sentíamos la certeza de que la bola caería al suelo. Utilizando quizá un lenguaje que nos anticipamos, un lenguaje en términos porcentuales, digamos que cuando algo es necesario es que va a suceder en el 100% de los casos.

Sí, diríamos que seguro que ocurre. Que seguro que ocurre. Que en cualquier caso, que en ningún caso se nos pasa por la cabeza que no vaya a suceder.

Y bien, y ahí se opone el concepto, digamos, opuesto, que es muy importante porque de aquí es de donde arranca todo el planteamiento de lo que es la probabilidad y, por supuesto, también la estadística, que es el de azar. Sí, el azar surge como confrontación con la idea de necesidad que hemos expuesto. Ya para resumir, la necesidad aparecía en los fenómenos en los que a una causa se seguía con certeza, con seguridad un efecto.

Sin embargo, hay otros fenómenos en los que esto no es así. Dándose las mismas causas en otros fenómenos, no tenemos la certeza, la garantía, la seguridad de que vaya a ocurrir el efecto. Por ejemplo, pues si tengo yo una caja con bolas de color blanco y de color negro y saco una bola de la caja sin mirar, pues no tengo, ahora mismo yo no soy capaz de pronosticar si lo que salga será blanco o será negro.

Desde luego que será uno de esos dos colores. Y esto vuelve a ser ejemplo de necesidad. Es necesario que la bola que salga sea de alguno de los colores de las bolas que están en la caja.

Pero cuál sea el color concreto, no puedo garantizarlo de antemano. A pesar de que cuando vuelva a introducir la mano y a sacar otra bola, en las mismas condiciones, con el mismo

número de bolas en la caja, de los mismos colores, vuelvo a repetir el mismo experimento, vuelvo a tener las mismas causas. Y de nuevo esas causas son incapaces de garantizarme que necesariamente ocurra un fenómeno.

Y es aquí donde nos metemos precisamente en el concepto de probabilidad, que lo que nos va a medir es qué posibilidades hay en este ejemplo que has puesto, o de que las bolas vayan a ser de un color o de que vayan a ser del otro. Es decir, ya no tenemos una certeza al 100% de seguridad, sino que vamos a tener un porcentaje en más o en menos, y calcular ese porcentaje en más o en menos, según los datos que nos ofrezca cada problema, es precisamente lo que es la probabilidad. Pero vamos a profundizar más en este concepto.

Sí, vamos a seguir un poquito con el ejemplito, porque es interesante, este ejemplo de las bolas. Acostumbramos a hablar de una manera que a mí me agrada, porque es una especie de mitología que inventamos. Nosotros no estamos seguros de cuál será el color de la bola que saquemos.

Y entonces nos inventamos un algo que gobierna, que es el que determina el color que va a salir. Un algo, en cierto modo, relativamente caprichoso, que es el azar. Y aparece ya así la confrontación necesidad-azar.

En los casos que vimos al principio, la necesidad obliga a que algo ocurra. En este ejemplo de bolas de distintos colores en una caja y elección de una bola ciegas, es el azar, eso que nos hemos inventado, el que determina el color de la bola. Pero los caprichos del azar no son absolutos.

El azar no se comporta, o esperamos que no se comporte, de una manera absolutamente caprichosa. Sino que nosotros, a lo mejor con un poco de atrevimiento, queremos medir ese comportamiento del azar. Y esa medida es precisamente la probabilidad a la que te referías.

La probabilidad, sí. O sea que el azar es difícil de conocer, pero no es caprichoso. Puede haber algunos elementos que nos permitan decir, sin poder llegar al concepto de obligatoriedad absoluta de que algo suceda, que era lo que nos traía la necesidad, por lo menos de unos ciertos condicionamientos según la situación que inclinen el azar a que suceda una cosa o que suceda otra.

Desde el punto de vista matemático, la probabilidad, ¿cómo se podría explicar? Si te parece, todavía un poquito antes de entrar en esto, me gustaría que entendiésemos la probabilidad como la medida de la facilidad con que el azar elige algo u otra cosa. Es decir, esto en cierto modo es la manera ordinaria de entenderlo. Volviendo ya con reiteración al ejemplo de la caja con bolas blancas y bolas negras, el término probabilidad de que aparezca una bola blanca parece expresar un deseo de medir la facilidad con que el azar va a determinar que la bola elegida sea blanca.

Esto es en cierto modo bastante intuitivo. Si nosotros sabemos que en la caja hay muchas bolas

blancas y pocas bolas negras, nos parece de una manera natural pensar que es más fácil que el azar decida que la bola elegida sea blanca. Nos parece más probable que la bola elegida sea blanca.

Mientras que si el número de bolas blancas es igual al número de bolas negras, pues tampoco tenemos ningún reparo en decir que nos parece tan fácil, tan probable, que salga una bola blanca como que salga una bola negra. Claro, esa mano inocente que se mete dentro de la caja es inocente solo hasta cierto punto. O sea, viene gobernada un poco por el azar, según las bolas que haya.

Bueno, pues eso sería un poco intuitivamente la noción de lo que es la probabilidad. Sí, ahora vamos a la pregunta que hacías acerca del modelo matemático, que en fin, esto ya es un poco marguesudo como suele pasar con las matemáticas. El planteamiento ordinario para hacer un modelo matemático de uno de estos fenómenos en los que interviene el azar, pues suele comenzar por plantearse la pregunta de qué cosas pueden ocurrir, qué cosas distintas pueden ocurrir cuando se da esa causa común que no determina el efecto.

Por ejemplo, en el caso de nuestra urna o de nuestra caja con bolas blancas y bolas negras, pues todos estamos ya seguros que lo que puede ocurrir es que la bola que salga sea blanca o que la bola que salga sea negra. Hay tan sólo dos cosas que pueden ocurrir. Dos alternativas, sí.

Si lanzamos una moneda, pues quizá sea un prejuicio, pero nosotros pensamos que sólo pueden ocurrir dos cosas. Pensamos que os saldrá cara o os saldrá cruz. No se nos ocurre a mí, al menos en este momento, pues yo no se me ocurre ni apostar porque va a salir la moneda de canto, ni porque se va a quedar flotando, ni por cosas muy raras.

De manera que lo primero que hago es mirar al fenómeno y tratar de averiguar, insisto, qué cosas son posibles. Las propias alternativas que pueden darse. Lo primero es mirar qué alternativas hay.

Porque, por ejemplo, en el caso de una caja, si hubiera bolas de tres colores, blancas, negras y rojas, habría tres posibles alternativas con independencia del número de bolas. O va a ser roja o va a ser negra o va a ser blanca. O sea, primero analizar el fenómeno que se nos plantee.

Y entonces... Entonces, una vez hemos determinado qué cosas son posibles, establecemos lo que normalmente se llama un modelo de eso. Y un modelo matemático, que consiste en formar un conjunto que tiene tantos elementos como cosas son posibles. Cada elemento de ese conjunto va a representar a una de esas posibilidades.

Y este conjunto... Te voy a decir que normalmente los probabilistas... En fin, pues esa cosa que tenemos muchas veces de incorporar palabras de fuera sin pensar más, normalmente se acostumbra a llamar espacio muestral. Y quizá en inglés... Realmente es una traducción que proviene del inglés. Y en inglés tiene bastante sentido.

Sampling space. Pero en castellano suena un poco feo. Y como ya... Como Pilar Ruiva, la profesora de lengua, me llamó la atención por esto del espacio muestral.

Pues, si te parece, le vamos a llamar espacio de posibilidades. Pues sí, que realmente tiene toda la razón. Representa mejor lo que queremos decir.

Nosotros hemos mirado al fenómeno. Hemos visto las cosas que pueden ocurrir. Y al conjunto que representa las cosas o que tiene tantos elementos como cosas pueden ocurrir, le llamamos espacio de posibilidades.

Claro, que es un conjunto de posibilidades, en definitiva. Que es el número posible de alternativas de cosas que puedan suceder. Eso es.

Bueno, pues ya tenemos nuestro espacio de posibilidades. Y a continuación lo que hacemos es establecer una identificación entre los subconjuntos de ese espacio de posibilidades con lo que normalmente llamamos sucesos. Sucesos asociados a un fenómeno que gobierna el azar, pues son también cosas que pueden ocurrir, pero que no necesariamente son elementales.

Me explico. Si yo lanzo tres veces una moneda y voy anotando lo que ha salido, tengo ocho posibilidades distintas. Ocho cosas que llamaría posibilidades.

Si me pongo, no las voy a enumerar todas, pero podría salir cara, cara, cara, cara, cara, cruz, cara, cruz, cara, cara, cara, cruz, cara. Bueno, en fin, ya me he hecho un lío. Según el orden, sí.

Es decir, en cada tirada hay solo dos alternativas, que sea cara o que sea cruz. Pero según el número de tiradas que vaya haciendo puedo establecer combinaciones de que las dos primeras sean cara y luego la tercera y la cuarta cruces, o que una sea cara y otra cruz, etc. Entonces, bueno, si sumamos todas esas posibilidades... Tenemos ocho.

Tenemos ocho. Porque es dos por dos por dos. Entonces, los sucesos son... Esas ocho serían, como las estamos llamando, posibilidades.

Y entonces yo asociaría a ese experimento que consiste en lanzar tres veces una moneda, le asociaría un espacio de posibilidades con ocho elementos. Pero luego hay otras cosas que también ocurren o no, y que son lo que normalmente llamamos sucesos. Por ejemplo, aquello definido por esta frase que voy a decir ahora.

Alguno de los resultados es cara. Eso es algo... Que alguno de los resultados sea cara es algo que puede ocurrir o no, y es lo que ordinariamente llamamos un suceso. Pero no es ninguna de las ocho posibilidades elementales, sino que es algo que ocurre o no según que ocurran unas posibilidades elementales u otras.

Entonces, lo que hago es identificar, por ejemplo, ese suceso con el subconjunto de las posibilidades del espacio de posibilidades, tales que cuando ocurre esa posibilidad, entonces ocurre el suceso. De manera que en este caso, que sale alguna cara, sería un subconjunto del

espacio de posibilidades que estaría formado por todas las ternas en las que alguno de los resultados es cara. Por ejemplo, aquella que es las tres son caras, o las dos primeras son caras y la tercera cruz, o la primera y la tercera son caras y la segunda es cruz, etc.

Así, si no me equivoco, que creo que no, tengo siete posibilidades distintas, de manera que forzosamente alguno de los resultados es cara. Y el subconjunto formado por esas siete posibilidades representa al suceso alguno de los resultados es cara. Bueno, entonces, yendo ya más al concepto de probabilidad, la probabilidad, si nosotros calculamos la probabilidad de un suceso, o sea, de que algo ocurra o no ocurra, matemáticamente, ¿qué valores puede tomar? Pues, esto en la vida cotidiana, tú hablabas hace un momento de probabilidades como porcentajes, esto es muy frecuente y no es incorrecto, pero normalmente en matemáticas, sin embargo, más que hablar como porcentajes hablamos como números.

Y la idea es, una vez tenemos el espacio de posibilidades y los sucesos, definir algo que asocia a cada suceso un número, que es su probabilidad. Por consiguiente, desde el punto de vista matemático, la probabilidad tiene el estatus de ser una función de conjunto. Es una función que a cada uno de los subconjuntos del espacio de posibilidades le asigna un número.

Y ese número también tiene su pequeña rigidez. En matemáticas repartimos la unidad entre todas las posibilidades. Me explico.

En matemáticas, en lugar de hablar de porcentajes, que en cierto modo también es así, porque estamos repartiendo un 100% de los casos entre las cosas que pueden ocurrir, pues aquí en lugar de repartir ese 100%, repartimos 1. De manera que la probabilidad será un numerito que esté entre 0 y 1. Y tendrá el sentido intuitivo de que cuanto más grande sea la probabilidad de un suceso, más fácil nos parece o interpretamos que nos parece que ocurra ese suceso. Claro, mientras que si fuera la probabilidad 0 es que no ocurriría bajo ningún concepto, vamos. Sí.

Entonces, a todo esto dejamos de mencionar que también incorporamos un suceso un poco extravagante, pero precisamente para cubrir ese caso que decías de probabilidad 0. Es el suceso que llamamos imposible. Y en esta asociación de sucesos a subconjuntos, nosotros asociamos o representamos al suceso imposible, al suceso que no ocurre nunca y tiene probabilidad 0, por el subconjunto vacío del conjunto que es el espacio de posibilidades. Bien, ¿y se podría calcular la probabilidad de dos sucesos unidos? Sí, la probabilidad de la unión, si disponemos de datos suficientes, pues podremos calcularla.

Lo que es una propiedad fundamental de la probabilidad es que si los dos sucesos que unimos, es decir, la unión de dos sucesos se interpreta como otro suceso que ocurre cuando ocurre alguno de ellos, pues digo, si los dos sucesos que unimos son disjuntos en el lenguaje de conjuntos, es decir, que no pueden ocurrir simultáneamente, entonces es propiedad fundamental de la probabilidad que la probabilidad de esa unión sea la suma de las probabilidades. Esto, digamos, es una de las condiciones que imponemos a una función para ser probabilidad. O sea, sería la probabilidad de A como suceso, unión B igual a la probabilidad de A más probabilidad de B. Eso es.

Siempre que A y B no ocurran simultáneamente. Simultáneamente. ¿Podríamos poner algún ejemplo de esta unión, sacado de la vida cotidiana? Pues me pones ahora en un compromiso, porque no sé si sería capaz de... Bueno, simplemente, por ejemplo, si supongamos que nosotros vamos a jugar a la lotería, Arturo, entonces tú compras una lotería que tenga 100 números, y tú compras los billetes que tienen, o dos billetes que tienen el número 3 y el número 4. Si en la lotería en total hay 100 números, pues parece razonable esperar, suponiendo que todos los números aparecen con igual facilidad y sólo hay un premio, pues parece razonable que esperemos que hay una probabilidad 2 entre 100 de que el premio te toque a ti.

Si yo compro otro billete que tiene el número 5, tú tenías el 3 y el 4, pues yo espero tener una probabilidad 1 entre 100 de que me toque a mí. Cada una de esas dos cosas, que te toque a ti o que me toque a mí, son sucesos. La unión de esas dos es el suceso que nos toque alguno de los dos.

Y como los dos sucesos son incompatibles, no pueden ocurrir simultáneamente, porque tú llevas el 3 y el 4 y yo llevo el 5, entonces esperamos que la probabilidad del suceso que nos toque a alguno de los dos sea la suma de los dos números que dijimos antes, de 2 entre 100, que es la probabilidad de que te toque a ti, más 1 entre 100, que es la probabilidad de que me toque a mí. Bien. Esto me interesaba aclararlo porque hay otro concepto que es importante, que es el de la probabilidad condicionada, ¿no?, o de sucesos que están condicionados.

Sí. Entre los sucesos podemos apreciar relaciones, puesto que los sucesos son exactamente igual que los conjuntos y entonces pueden tener grandes partes en común. De manera que nosotros podríamos hablar de una probabilidad más restringida, una probabilidad limitada a un suceso más pequeño.

¿Cuándo tenemos la seguridad de que ese suceso ha ocurrido? Vamos a ver, que esto parece un poco oscuro y vamos a tratar de aclararlo. Por ejemplo, pensemos en un colegio con dos clases, o simplemente en dos clases. En una clase hay, por ejemplo, 10 alumnos que han aprobado un examen y 20 alumnos que han suspendido.

Y en la otra clase, la voy a llamar a la primera A y a la segunda B, en la clase B hay 30 alumnos que aprobaron y 10 que suspendieron. Si a mí me dicen que en la puerta hay un alumno de ese colegio, yo no sé si es de la clase A o es de la clase B. Y si de antemano me exigen que estime la facilidad de que ese alumno esté aprobado, la probabilidad de que ese alumno haya aprobado, mi estimación será coger el número total de alumnos aprobados que hay en el colegio y dividirlo por el número total de alumnos. Esa es una estimación global, porque yo carezco de la información de qué clase es ese alumno.

Sin embargo, si a mí me dicen hay un alumno en la puerta y es de la clase A, entonces mi estimación cambia. Mi incertidumbre se limita ahora. Ahora ya no es... mi incertidumbre no está extendida sobre todos los alumnos del colegio, sino que se limita a los alumnos de la clase A. Y mi estimación de que ese alumno haya aprobado es 10, que son los aprobados en la clase

A, entre 30, que es el número de alumnos de la clase A. Todo esto se traduce en una formulita que tenéis en el libro, digamos para ser un poco mecánico estos cálculos de probabilidad condicionada, y que nos dice simplemente que la probabilidad de un suceso condicionado por otro es el cociente de la probabilidad de la intersección de los dos sucesos partido por la probabilidad del suceso que condiciona.

Claro, que este caso sería que se diera el suceso de que el alumno pertenece a tal clase y dándose ese suceso, el segundo suceso sería que pertenece a los aprobados o a los suspensos. Exactamente, es decir, lo que hemos dicho con la tabla... O sea, el segundo suceso está condicionado al primero, a ver a qué clase pertenece. De manera formal se diría, si nosotros sabemos que el señor que está en la puerta es de la clase A, entonces se trata de calcular la probabilidad de que haya aprobado condicionado a que es de la clase A. Bueno, pues hemos comentado globalmente algunas de las ideas fundamentales que se tratan en el capítulo 10 y en el capítulo 11, sobre todo en el capítulo 10, que es donde están los conceptos básicos para luego entender todo lo demás.

Que esperamos os sirvan para repasar estas dos últimas lecciones que se exigen para el examen final, puesto que el capítulo 12 no se exige. No nos ha dado tiempo en el programa de hoy de ver algún ejemplo práctico, como solemos hacer siempre, extraído de modelos de exámenes que hayan caído en cursos anteriores, pero como todavía tenemos un próximo programa de despedida, en donde hablaremos ya más en concreto del examen final, ahí sí vamos a aprovechar para resolver algún problema de probabilidad, puesto que seguro que en el examen final algunas de las preguntas tratarán de probabilidad. Así que, en lo que hoy se refiere, Víctor, muchas gracias por haber estado con nosotros, hasta ese próximo programa y buenas noches.

Buenas noches. Hasta aquí la programación de la Universidad Nacional de Educación a Distancia. Nuestro tiempo termina ya.

Mañana no estaremos con vosotros, por ser día no lectivo, para celebrar la fiesta del 1 de mayo. Por lo tanto, volveremos a estar con vosotros el miércoles 2. Gracias por vuestra atención y muy buenas noches. La Universidad Nacional de Educación a Distancia La Universidad Nacional de Educación a Distancia Tobalecas Y está sucediendo tan rápidamente Y siento el fuego en el tiempo Y me rompe los dientes Para liberar mi mentira Para liberar mi mentira ¡Bombo! ¡Bombo! Me ha desnudado Y riendo y desnudado Nos hemos enloquecido en la insomnio
Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org