

AC 15 59

¡Buenas noches de nuevo con ustedes! Como todos los días, de lunes a viernes, en este programa dirigido a los alumnos del curso de Acceso Directo, así como para aquellos interesados en todo el abanico de temas que aquí tocamos. En el programa de esta noche, Matemáticas Especiales, nos acompañan los profesores José Leandro de María y Arturo Fernández Arias. Con ellos, comentaremos los aspectos más importantes de los temas 18 al 23.

Esta noche, en nuestro programa de Matemáticas Especiales, nos acompañan los profesores José Leandro de María y Arturo Fernández Arias. Muy buenas noches. Buenas noches.

Hola, buenas noches. Vamos a ver los temas que van del 18 al 23, que nos hablan de sucesiones, límites de sucesiones, funciones y polinomios. Al comenzar a leer los capítulos 18 y siguientes, parece como que hay un cambio de materia de lo que hemos visto hasta ahora.

¿Es así, Pepe? Sí, efectivamente. Ahora se comienza con un nuevo área de conocimiento dentro de las matemáticas, que es el análisis. La metodología de esta área es distinta, sustancialmente, de los capítulos anteriores.

Básicamente, y para hacerlo de una forma muy simple, trata del concepto de función y del concepto de límite. Esto no es una cuestión tan determinada como lo que el alumno ha estudiado en el libro hasta ahora. No tiene tantos algoritmos, aunque obviamente los tiene, pero son menos deterministas.

Por ejemplo, cuando estudió cómo se invierte una matriz, o qué es un vector, es más claro que cuando va a estudiar una serie de funciones, por muy sencillas que sean, las polinómicas de las que luego hablaremos. Se podría decir, por tanto, que se complica un poco, que es más difícil, aunque sea simplificar mucho, pero que es más difícil esta parte de la materia. Puede ser, en algún momento, un poco más difícil entenderla, pero luego tiene grandes ventajas.

Las aplicaciones son altas, y, desde luego, si van a estudiar cualquier carrera que tenga que ver con la técnica, lo van a necesitar de una forma absoluta. Tiene una ventaja. En el capítulo 18 empezamos viendo el concepto de sucesión.

¿Podrías explicarnos, básicamente, qué es, Arturo? Una sucesión es un concepto muy natural. Podríamos dar una definición muy precisa o rigurosa, como decimos los matemáticos, pero yo creo que es mejor, simplemente, describirlo en términos sencillos. Una sucesión, para entendernos, es una disposición infinita de números, pero con dos peculiaridades.

Primero, que se pueden repetir estos números y que es muy importante el orden. La sucesión más natural o más sencilla es la de los números naturales, 1, 2, 3, y, entonces, en este caso, decimos que el término general es el término n , porque en el lugar n aparece el número n . Otra sucesión muy natural también es la de los inversos de los números naturales, la 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. En este caso, decimos que el término general es 1 partido por n . Podríamos poner

muchos ejemplos sencillos, por ejemplo, la de los cuadrados de los números naturales, 1, 4, 9. En este caso, diremos que es el término general el n cuadrado.

Podríamos poner otros ejemplos, y a veces el término general no es sencillo, en cuyo caso sería más difícil enumerar de forma precisa quiénes son los términos, pero, en fin, la idea es esta. Es una disposición de números infinita, donde es muy importante el orden y donde tenemos que hacer la observación que se pueden repetir los números. ¿Con las sucesiones se pueden hacer operaciones algebraicas igual que con los números? Bueno, las sucesiones son más parecidas a lo que el alumno ha visto de los vectores.

Es decir, se pueden sumar, restar y multiplicar por escalares, por lo que su estructura es lo que se ha visto como un espacio vectorial. Se parece un poco a los vectores del plano, lo que pasa es que, en lugar de tener un número finito de componentes, 2 en el caso del plano, 3 en el caso del espacio, pues serían infinitas. También definimos en el libro el producto y la división de dos sucesiones, pero las propiedades no son tan buenas como tienen los números.

¿Existen tipos importantes de sucesión? Sí, existen tipos importantes de sucesión. Es decir, las sucesiones se pueden clasificar de muchas formas, pero algunas son muy naturales y por eso decimos que son más importantes. Por ejemplo, destacaríamos las sucesiones positivas o sucesiones negativas, son las sucesiones cuyos términos son todos positivos, o las negativas, cuyos términos son todos negativos, o las alternadas, en que un término es positivo y el siguiente es negativo, y más adelante, hay clases de sucesiones fundamentales, pero quizás sería mejor esperar a ver el concepto de límite, pero anticipo, por ejemplo, la clase de sucesiones convergentes, la clase de sucesiones no convergentes, etc.

¿Podríamos poner aquí algún ejemplo, o sería difícil por la radio poner algún ejemplo de sucesión? Bueno, hemos puesto de sucesión, hemos puesto ya varios, y cuando hablé de la definición de sucesión, hablé de la sucesión de números naturales, hablé de la sucesión de los cuadrados de números naturales, de los inversos, pero hay sucesiones históricamente muy famosas y que juegan un papel muy central en el análisis. Una es, por ejemplo, la $1 + \frac{1}{n}$ partido por n elevado a n , que es una sucesión que tiene un límite, el concepto del que vamos a hablar un poquito más adelante, que es el número e , y existen sucesiones, la sucesión de los números de Fibonacci, pero, en fin, quizá en este momento sería mejor poner ejemplos más sencillos. Este concepto del límite de una sucesión es muy importante, ¿verdad? Sí, la utilidad de una sucesión realmente es saber si esta tiene límite o no lo tiene.

De forma intuitiva, el límite de una sucesión es a lo que tiende el término general cuando el número de términos que hemos realizado es muy alto. ¿Por qué tiene utilidad? Bueno, en las aplicaciones muchas veces se pueden medir, parcialmente, un cierto fenómeno físico o una cierta variable económica, en fin, y entonces, mediante distintas técnicas de medición, cada vez más finas, se van obteniendo números. Es muy interesante saber cuál es el valor límite de esos números, porque, de alguna manera, daría la ley que rige ese fenómeno.

El concepto del límite de una sucesión es un concepto importante que ha sido introducido o

perseguido, mejor dicho, por muchísimos autores, y se formalizó a finales del siglo XVIII de una forma ya más rigurosa. Cauchy es uno de los matemáticos importantes que se ocupó de él. Luego hablaremos también, cuando entremos en el capítulo de funciones, de otros términos que el mismo Cauchy formalizó.

Pero, realmente, la utilidad de una sucesión es que, si tiene límite o no lo tiene, porque puede haber fenómenos también naturales que sean divergentes, y ser divergente significa que la sucesión no tiene límite. Es importante conocer si un proceso tiene o no tiene límite en las mediciones. Bien, como nos estáis diciendo, el concepto de límite es muy importante, pero ¿existen métodos para calcular límites de sucesiones? Sí, efectivamente, existen métodos para calcular límites de sucesiones.

Como decía al empezar, una sucesión nos la dan habitualmente en términos de su término general. Ese término general puede ser muy complicado, pero, quizá, un análisis un poco cuidadoso de él nos lleva a que se pueda descomponer como sumas de sucesiones más sencillas, o como productos, o como cocientes. Entonces, existen reglas muy sencillas que nos dicen, por ejemplo, que si dos sucesiones tienen límite, la sucesión tiene límite y el límite es la suma de los límites, análogamente para el producto y análogamente para el cociente, en el caso de que la sucesión denominador no tienda a cero.

Estos son los métodos más sencillos, pero, desde luego, hay muchos métodos del análisis más sofisticados. Por ejemplo, cuando podemos utilizar las herramientas del cálculo diferencial, pues aparece un método muy potente, que es la regla del lópital. Y, en fin, para otros tipos particulares de sucesiones, que son las llamadas series, que son sucesiones cuyos términos generales son sumas de otras sucesiones, pues existen multitud de métodos derivados de resultados del análisis.

Pero, vamos, yo creo que deberíamos hacer hincapié aquí que los métodos básicos son estos, que la suma de sucesiones convergentes, es decir, que tienen límite, es también convergente, y su límite es, precisamente, la suma de los límites, análogamente para el producto, y una cosa parecida para el cociente, con la limitación de que el denominador no debe tender a cero. El siguiente concepto que aparece es el de función. ¿Es un concepto importante, secundario? Bueno, es el concepto más importante del análisis.

De hecho, el análisis matemático, dicho de forma breve, es la parte de la matemática que estudia las funciones y sus propiedades. Todo el resto del libro, desde este capítulo, se dedica a estudiar funciones generales, y algunas que se les van añadiendo ciertas propiedades, como va a ser la continuidad o la derivabilidad, de tal manera que es muy importante conocer el comportamiento de una función, luego lo iremos desarrollando un poco más. La técnica básica que vamos a utilizar y que se puede estudiar en el libro es la famosamente conocida, el cálculo diferencial.

Y las herramientas básicas del cálculo diferencial es el concepto de límite de una función en un punto, el concepto de derivada y el concepto de integral. ¿De dónde surge el cálculo

infinitesimal? ¿Cuál es su historia? Bueno, pues los creadores del cálculo infinitesimal son Newton y Leibniz, y sus motivaciones iniciales venían de la vida práctica, del estudio de los astros, de la física, y también de la geometría. Así, por ejemplo, el concepto de derivada, que es central en el cálculo infinitesimal.

El cálculo infinitesimal suele abarcar el cálculo diferencial y el cálculo integral. Un concepto fundamental, que veremos más adelante, es el concepto de derivada, pues nociones tan cotidianas como la velocidad, etc., pues su plasmación matemática es el concepto de derivada. Posteriormente, el análisis, el cálculo infinitesimal, que podríamos decir que es la parte fundamental del análisis matemático, ha tenido desarrollos muy importantes en Francia, por ejemplo, en Cochile, en la plaza de Lejandre, y en Alemania, también, en Riemann, en Weierstrass, pero, en fin, esas han sido las principales escuelas, originalmente, Francia, Alemania, o actualmente, Rusia, Estados Unidos y otros países, y las motivaciones iniciales fueron motivaciones prácticas.

Yo creo que en la actualidad hay una tendencia más especulativa y teórica. Y en cuanto al concepto de función, ¿podemos comentar algo? Sí, yo creo que es interesante explicar al alumno que en el libro, en este curso, que es un curso básico, introductorio, se van a estudiar funciones que son lo que denominamos funciones de una variable. Es decir, una función es, básicamente, una ley que a unos valores que denominamos variables independientes les asociamos un valor que es el valor de la función para esas variables.

Estas funciones, en este curso, solamente dependen de una sola variable, normalmente las sabemos denominar x , pero, en cuanto avancen un poco en el estudio del análisis matemático, descubrirán que hay funciones de varias variables y que tienen una enorme importancia, incluso desde el punto de vista histórico. Se pueden encontrar muchísimos ejemplos. Por ejemplo, supongamos que conocemos cuánta agua sale de una presa por minuto.

Esto nos permite calcular cuánta agua saldría, por ejemplo, una hora, porque conocemos la ley de pérdida de agua de la presa. Hay leyes más complicadas y algunas importantes, por ejemplo, la ley de gravitación. Básicamente, la ley de gravitación dice que la atracción entre dos cuerpos es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Esto nos permite calcular, conocidas las masas de los cuerpos y la distancia, cuál es la fuerza de atracción entre dichos cuerpos. ¿Cuáles son las variables independientes en este caso? Las masas de los cuerpos y la distancia que hay entre ambos. ¿Cuál es el valor de la función? El resultado de aplicar la fórmula que rige dicha ley.

Podemos entrar en el tema 20, donde aparecen los polinomios. ¿Qué es un polinomio? Un polinomio es una expresión formada por unos coeficientes que multiplican a una variable elevado a unos ciertos exponentes. Los polinomios, en principio, son expresiones de este tipo.

Ahora bien, dan lugar a unas funciones, que son las funciones más simples que podemos tener,

que son las llamadas funciones polinómicas. Yo creo que es conveniente poner algún ejemplo. Los polinomios más simples son de la forma $ax + b$, $2x + 1$, $5x - 2$, etc.

Los siguientes polinomios, en sencillez, son los polinomios cuadráticos. Digamos, $3x^2 + 2x - 1$. Los polinomios se pueden operar con ellos, se pueden sumar, se pueden restar, y existe también una operación que es la llamada división euclídea de dos polinomios, que es una herramienta muy importante a la hora de hacer cálculos, y para la cual describimos algunos métodos en el libro, por ejemplo, la llamada regla de Ruffini. Fundamentalmente, es la regla que describimos.

¿Y qué es la raíz de un polinomio? Simplemente, la raíz de un polinomio es un cierto valor de la x para la cual el polinomio se hace cero. Esto es equivalente a que el polinomio sea divisible por $x - a$. Es un hecho interesante, que también podemos comentar, yo creo, que los matemáticos de varios siglos se han preguntado si había polinomios sin raíces. La cuestión no era ni mucho menos trivial, pues con coeficientes reales podían existir polinomios que no tuvieran raíces reales.

Pero una vez descubierto el cuerpo de los números complejos, del cual hablamos en el libro, se obtuvo el importante teorema fundamental de Lázaro, que asegura que todo polinomio con coeficientes complejos, y el caso real es un caso particular de estos, tenía al menos una raíz. Y esto, siguiendo un proceso de inducción sencillo, equivale a decir que el polinomio puede ser descompuesto en monomios de coeficientes complejos. Es decir, en monomios de la forma $x - a$, donde a es un número complejo.

Esto fue un avance importante en la matemática y es un hecho realmente muy importante que ha dado lugar a amplias ramas de la matemática, a un desarrollo alto de la teoría de cuerpos y cuestiones de más nivel, pero cuyo hecho fundamental es el teorema fundamental del álgebra. Continuamos hablando de las funciones racionales. Las funciones racionales son la siguiente clase de funciones más simples que nos podemos encontrar.

Las primeras eran las funciones polinómicas. Las segundas son funciones de división de dos polinomios. Las que más nos interesan son las llamadas funciones propias, funciones racionales propias.

Son aquellas en que el grado del numerador es menor que el denominador. Pero, dada cualquier función racional, mediante la división Euclídea de dos polinomios que antes mencionábamos, podemos descomponer en un polinomio toda función racional en un polinomio más una función racional propia. Bueno, existen métodos de descomposición de una función racional en otras funciones racionales más sencillas.

Es el llamado método de descomposición en fracciones simples que aparecerá en multitud de lugares en el análisis, en la integración de funciones racionales, en otra serie de puntos. Y aquí, de nuevo, encontramos el concepto de límite, pero esta vez, en vez de sucesiones, de funciones. Sí, decíamos antes que el límite es el concepto fundamental del análisis.

¿Cómo podríamos describir, por este medio un poco más complicado, lo que es el límite de una función en un punto? Bueno, vamos a intentarlo. Supongamos que tenemos una función que llamamos f de x y queremos conocer cuál es el límite de la función en un cierto punto que vamos a denominar a . Bueno, pues, de una forma intuitiva, es el valor al que se aproximan los valores de la función en un entorno del punto a . Es decir, es el punto próximo a donde se aproximan los valores de la función en dicho punto. Claro, eso nos permite definir, y a la vista de cualquier gráfica del libro relacionada con este tema, el concepto de límite lateral.

Es decir, dada la forma de la recta y nuestro modelo, pues existen puntos por la izquierda y puntos por la derecha. Bueno, pues el límite lateral por la izquierda será el valor al que tienden los valores de la función por la izquierda y el límite lateral por la derecha será el valor al que tienden los valores de la función por la derecha. En cualquier caso, nos gustaría que reflexionase el alumno en que no tiene por qué coincidir el concepto de límite de una función en un punto con el valor de la función en el punto.

Esto nos dará lugar a un tipo muy importante de funciones que son precisamente las funciones continuas. Y luego hablaremos de esto. Yo creo que Arturo podría hablarnos un poco del álgebra de límites y límites infinitos y límites en el infinito.

Efectivamente. Pues un poco rememorando lo que decíamos sobre los métodos de cálculo de límites en el caso de sucesiones, pues igual en el caso de funciones existen métodos muy simples para calcular límites de funciones más o menos complicadas en términos de límites más sencillos. Por ejemplo, una regla, quizá la más básica, sea que el límite de una suma de funciones, cuando la variable tiene un cierto punto, es la suma de los límites de las respectivas funciones cuando la variable tiende al mismo punto.

Análogamente pasa con el producto y también con la diferencia. El cociente presenta el mismo problema que el límite de los denominadores ha de ser cero. Aparte de este álgebra de límites finitos, digamos así, existen también los límites infinitos.

Existe el concepto de límite infinito que es ligeramente diferente del concepto de límite finito, cuando una función tiende a un punto, y consiste en que la función no se aproxima a nada, sino simplemente que tiende a infinito. Cuando la variable tiende a un valor finito, digamos 3, y la función se hace tan grande como queramos, próxima de 3, decimos que la función tiende a infinito. Análogamente definiríamos cuando tiende a menos infinito.

Para estos límites, ligeramente distintos de los anteriores, existen unas reglas análogas, con algunos pequeños inconvenientes que creo que el alumno debería meditar y observar cuidadosamente en el libro. Habéis hablado antes del concepto de continuidad. Es un concepto importante.

Sí, la continuidad, precisamente, y lo he hablado hace un momento, ocurre cuando una función, en un cierto punto A , precisamente su límite en ese punto coincide con el valor de la función en el punto. ¿Por qué son importantes las funciones continuas? Porque a veces no es

fácil saber cuánto vale una función en un punto, pero sí es fácil ver cuál es el límite de la función en dicho punto. Las funciones más importantes del análisis, obviamente, son las funciones continuas.

Y ejemplos, justamente, a partir de esta lección, se van viendo muchos ejemplos de funciones continuas, y algunas discontinuas, que también son muy importantes. Por lo que ha dicho Arturo, las operaciones con funciones continuas, y dado que la continuidad es un concepto, básicamente, ligado al de límite, pues ocurre que la suma de dos funciones continuas en un punto es continuo en dicho punto, y lo mismo con el producto, y lo mismo con el cociente, salvo lo de siempre, el valor del denominador no puede ser cero. En este punto sí me gustaría remarcar una cosa, y es que una de las cosas que están vetadas en matemáticas es dividir por cero.

Es decir, siempre que el alumno se encuentre con un ejercicio en el cual tiene que dividir por cero, pues tendrá que hacer un análisis más delicado de la situación, porque pueden ocurrir todo tipo de cosas, desde que tenga, a pesar de que dividamos por cero, si el numerador también tiende a cero, pues entonces puede ser que el límite sea cualquier número, puede ser que sea infinito, puede ser que sea cero, es decir, se dan todas las posibilidades. Esto es una cosa que debe quedar claro a los alumnos, y, además, tener un poco de cuidado. Cuando el denominador tiende a cero, hay que tener más cuidado.

Esa es una especie de pequeña norma de comportamiento. ¿Algún ejemplo de función continua? Los ejemplos más sencillos de funciones continuas son los polinomios, y las funciones racionales tienen algún inconveniente respecto a la continuidad. Las funciones racionales son continuas en casi todos los puntos, salvo en aquellos donde se anula el denominador.

Es decir, la continuidad es un concepto local, puede ser continua en unos puntos, puede no serlo en otros, pero las funciones racionales lo son en casi todos, pero falla en algunos puntos que es precisamente donde se anula el denominador. En general, todas las funciones elementales, como los senos, cosenos, tangentes, que veremos más adelante, van a ser continuas, y, en general, todas las funciones que aparecen en la física y en la práctica. Sin embargo, las funciones continuas, dentro del análisis matemático, es una clase moderadamente limitada.

Hay muchos ejemplos de funciones que no son continuas, las discontinuidades pueden ser de muy distintos tipos, pero, en fin, estos son los ejemplos. La función tangente tiene una característica especial, y es que es continua en un cierto intervalo, en el π medios, menos, perdón, π medios, π medios. Luego aparecen unas asíntotas, pero, en realidad, el interés de la función tangente es que es continua en donde está bien definida.

Luego hay una cierta periodicidad, que ya hablaremos de ello, pero es una función básicamente continua, su carácter es de continuidad. A mí me gustaría acabar ya con este tema 23, hablando de los hechos más importantes de las funciones continuas sobre intervalos.

Bueno, tanto Arturo como yo queremos destacar que las funciones continuas tienen en sus propiedades de los teoremas más bonitos de las matemáticas.

Por ejemplo, uno de ellos es el teorema de los valores intermedios. Son funciones continuas definidas en un intervalo de la forma, por ejemplo, $[0, 1]$, o un intervalo de la forma $[a, b]$, en general. Y una de las interesantes propiedades de las funciones continuas es que si una función continua toma un cierto valor, dos ciertos valores, a y b , entonces toma todos los valores intermedios.

Vamos a poner un ejemplo para que sea más claro. Por ejemplo, si una función continua toma en un cierto punto el valor 1 y en otro cierto punto el valor 2, va a haber puntos en los cuales va a tomar todos los valores desde el 1 hasta el 2. Pues esto lo puede hacer muchas veces, pero es seguro que al menos existe un punto para cada valor intermedio entre el 1 y el 2. Yo creo que ahora Arturo debería comentar el teorema de Bolzano, que es un teorema de altísima utilidad. Efectivamente, el teorema de Bolzano se puede considerar como un caso particular del anterior.

Decía Pepe que cuando una función toma dos valores, por ejemplo, el 1 y el 2, pues toma todos los valores intermedios. Bueno, pues ahora supongamos que toma uno positivo y otro negativo, el menos 1 y el 2. Bueno, pues tiene que haber un punto donde tome el 0, que es un valor que está entre menos 1 y 2. Esto es un teorema, efectivamente, fundamental, porque nos permite asegurar que existen ceros de la función, y esto, en general, tiene una gran importancia desde el punto de vista de la descomposición de la función o de la descripción gráfica de la función. Repito, el teorema de Bolzano afirma que cuando una función toma valores positivos y valores negativos, también tiene ceros, una función continua.

Esto es de una gran importancia. Otro teorema muy importante es el teorema de Baer-Strauss, que dice que en un conjunto cerrado y acotado, son nociones topológicas sencillas, una función continua toma un máximo y un mínimo. En general, una función es acotada, pero no solamente eso, sino que existe un punto donde toma el máximo y otro punto donde toma el mínimo.

Bueno, y esto es básicamente lo que podemos comentar sobre los teoremas importantes de las funciones continuas definidas en intervalos. También destacar, y es un hecho importante que usaremos después, que si una función está definida sobre un intervalo y tiene inversa, esto no ocurre siempre, es lo que hemos llamado inyectividad, pues la función inversa también es continua. Con estos teoremas, cuyo planteamiento y demostración son relativamente sencillos, se cierra la enorme propiedad que tienen las funciones continuas y se ve la enorme potencia.

Y, de hecho, en la evolución que tiene el análisis, la cual ha avanzado una barbaridad en el último siglo, no obstante, el fundamento lo podemos encontrar en estos hechos. Y es muy importante que los alumnos interesados tengan presentes estas propiedades para luego generalizarlas y estudiarlas más profundamente, pero lo básico está aquí. Bien, nos queda un minuto para acabar nuestro programa, pero en este espacio breve de tiempo me gustaría... En fin, me ha parecido este programa quizá un poco más difícil de explicar, unos conceptos algo

más complicados.

Hemos visto los temas del 18 al 23, sucesiones, funciones, polinomios. ¿El alumno cómo debe prepararse estos temas? Son inminentemente prácticos, debe hacer muchos ejercicios. Tienes razón en lo que dices, de que aquí hay un salto cualitativo, aquí aparecen conceptos nuevos y realmente difíciles, que además van a jugar un papel muy importante en todo el resto del curso, y en general en todo el análisis matemático, como son el concepto de límite, el concepto de función.

Entonces, hay que hacer mucho hincapié en entender estos conceptos, hay que dedicarle tiempo a reflexionar sobre ellos, pero hay un aspecto práctico también. Yo diría que tienes razón en una parte, es bastante práctico en lo que se refiere al cálculo de límites, por ejemplo, cálculo de sucesiones, aprender los métodos, pero hay que dedicarle también al entendimiento claro de los conceptos, lo cual es muy importante también de cara a la cuestión práctica, porque cuanto mejor se entiendan los conceptos, más natural nos van a parecer estos métodos, más naturales y más fácil nos va a ser manejarlos. Pues bien, les espero en el próximo programa.

Muchas gracias y muy buenas noches. Buenas noches. Con el curso de acceso, despedimos la programación de la UNED en el día de hoy.

Mañana volveremos a nuestra hora habitual y en esta misma emisora con Revista de Derecho. Continuaremos con el informativo semanal de la UNED. Nuestro último programa será el curso de acceso.

Les agradecemos su compañía, que pasen una feliz noche.