

AC 15 12

Matemáticas especiales, guión número 16, espacios vectoriales. Vamos a tratar de estudiar una nueva estructura de gran importancia en el campo de la matemática y todas las ciencias experimentales y de la naturaleza. El espacio vectorial.

Supongo, entonces, que definirá una ley de composición interna sobre un conjunto dado y luego dará propiedades, ¿verdad? No exactamente. En las estructuras que hemos estudiado hasta ahora, grupo, anillo y cuerpo, la construcción de las mismas es análoga a la que acaba de decir. Ahora bien, en la estructura que vamos a introducir, una de las leyes es como las vistas, o sea, de composición interna.

Ah, sí, ley de composición interna es aquella que agrupa elementos de un conjunto dos a dos para dar otro elemento del mismo conjunto. Por ejemplo, en los naturales, una ley de composición interna puede ser la suma, ya que al sumar dos números naturales tenemos otro número natural. Bien, veo que recordáis lo que significa ley de composición interna definida en un conjunto.

Como decía, en nuestro caso, una de las dos leyes que utilizamos para definir el espacio vectorial es interna, pero la otra ley es externa. Sí, pero no sabemos lo que es una ley de composición externa. Claro, claro, pues todavía no hemos hablado de ella.

Ahora, vamos a definir qué significa ley de composición externa. Sean dos conjuntos A y B. Formamos el producto cartesiano A por B, y una aplicación de este conjunto cartesiano en el conjunto B. Es decir, a cada par del conjunto A por B se le hace corresponder un elemento de B. La verdad es que no lo entiendo muy bien. Aclarémoslo con un ejemplo.

Veamos. Supongamos que el conjunto A es el conjunto de los números naturales, y B el conjunto de todas las esferas de distintos volúmenes. El producto cartesiano de A por B es el conjunto de los pares tales que el primer elemento del par es un número natural, a, minúscula, y el segundo es una esfera de un cierto volumen, v. A este par le hacemos corresponder la esfera de volumen a, minúscula, por v. Hemos establecido una aplicación de A por B en B. Ya que a cada par de A por B, es decir, a cada número natural a, minúscula, y esfera de volumen v, se le hace corresponder la esfera de volumen producto de a, minúscula, por v, que es una nueva esfera de volumen a veces más grande.

Ahora ya lo veo más claro. Pues bien, si ha quedado entendida la ley de composición externa, vamos a pasar a definir la estructura de espacio vectorial. Para la definición de esta estructura de espacio vectorial, hacen falta dos conjuntos.

Uno de ellos lo llamaremos v, y el otro lo llamaremos k. Y si se verifican las condiciones, que luego diré, tendremos un espacio vectorial v sobre k. Ah, claro, nos hacen falta dos conjuntos porque tenemos que definir una ley de composición externa. Exactamente. Vamos a definir la estructura.

Sean dos conjuntos V y K . Impondremos que V sea grupo abeliano, y K , cuerpo conmutativo. O sea, que no se pueden tomar dos conjuntos cualesquiera, sino que hay que coger conjuntos que tengan unas estructuras. Un grupo es un conjunto con una ley de composición interna definida sobre el que se cumplen las propiedades.

Asociativa, existencia de elemento neutro, y existencia de simétrico para cada elemento del conjunto. Muy bien. Y además, como tiene que ser abeliano, tiene que cumplir la propiedad conmutativa.

Recuerdo que un conjunto tiene estructura de cuerpo si sobre él se definen dos leyes de composición interna, tales que respecto a la primera es grupo abeliano, y respecto a la segunda verifica la propiedad asociativa, existencia de elemento neutro, y existencia de inverso para todo elemento que no sea el neutro. Además, se verifica la propiedad distributiva de la segunda ley respecto de la primera. Veo que se acuerda de que aunque en general, en cualquier estructura, al elemento tal que compuesto con otro, a la izquierda y a la derecha, da el elemento neutro, se le llama elemento simétrico.

Cuando tenemos dos leyes de composición interna definidas sobre el mismo conjunto, a este elemento simétrico, en una ley, se le llama opuesto, y en la otra, inverso. Y además, a la primera ley la solemos llamar aditiva, y el signo que la denota es el más. A la segunda ley decimos que es la multiplicativa, y el signo que la denota es el punto de la multiplicación.

Además, designamos como elemento neutro respecto de la adición al cero, y neutro de la multiplicación al uno. Esto se hace porque tanto los números racionales como los reales que poseen la estructura de cuerpo tienen el cero y el uno como elementos neutros, y las leyes son la suma y el producto. Además, el opuesto de a es el menos a , y el inverso de a es a elevado a menos uno.

Bueno, hemos definido la estructura de cuerpo, pero para definir espacio vectorial nos hace falta tener un cuerpo conmutativo. Un cuerpo es conmutativo si se verifica la propiedad conmutativa respecto a la segunda ley. Bien, ya tenemos vistas las estructuras de grupo y cuerpo necesarias para definir la de espacio vectorial.

El conjunto V , repito, ha de ser grupo abeliano, y el conjunto K , cuerpo conmutativo. Ahora establecemos una ley de composición externa de K por V en V , de forma que a cada par de K por V se le hace corresponder un elemento de V . Bueno, esta es la aplicación que decía antes de las esferas. Precisamente.

Pero pueden comprobar si los conjuntos anteriores cumplen las condiciones iniciales para ser espacio vectorial. En el ejemplo de antes, el conjunto V es el de las esferas de distintos volúmenes, y el conjunto K es el conjunto de los números naturales. Vamos a comprobar si V es grupo.

Definimos en V la suma de volúmenes. Dadas dos esferas de volúmenes V_1 y V_2 , la suma nos

da una esfera de volumen V_1 más V_2 . Respecto a esta ley de composición, el elemento neutro sería la esfera de volumen cero.

Ahora bien, nos preguntamos, ¿existen volúmenes negativos? Desde un punto de vista intuitivo, no existen volúmenes negativos. Entonces, no existe elemento simétrico. Ya que dada una esfera de volumen V , para que al sumarla con otra esfera nos dé la de radio cero, necesariamente el volumen tendría que ser menos V . Por lo tanto, no es un grupo.

Pues, si V no es un grupo, no se puede definir la estructura de espacio vectorial. Además, el conjunto de los números naturales no es cuerpo. Bien, sigamos adelante.

A los elementos del grupo abeliano V les llamaremos vectores, y los designaremos por el alfabeto latino A, B, C , etc. A los elementos del cuerpo conmutativo K les llamaremos escalares, y los designaremos por las letras del alfabeto griego, alfa, beta, gamma, etc. Si consultan algunos textos, verán que a veces los escalares y los vectores se designan con las mismas letras, solo que a los vectores se les distinguen porque están escritos en negrilla, o sea, letra más oscura.

O si no, los vectores tienen una rayita o flechita encima. Esta última nomenclatura es muy útil para diferenciar vectores de escalares. ¿Cómo denotaremos las leyes de V y K ? Aquí deben tener mucho cuidado porque existirá la ley suma con el signo más en V . Es decir, el vector A más el vector B será otro vector C igual al vector A más el vector B . En el cuerpo tendremos dos leyes, la suma y el producto.

Si sumamos dos escalares, alfa y beta, obtendremos el nuevo escalar gamma igual a alfa más beta. Y aquí es donde surge la primera dificultad, porque usamos el mismo signo más en las dos leyes de los conjuntos V y K . ¿Y no existe la suma de un escalar con un vector? Fíjese que si existiera esa aplicación, sería la ley externa y el resultado sería un vector, pero habitualmente la ley externa se designa por el punto de la multiplicación. Bien, surge ahora la segunda dificultad, pues designamos con el punto dos leyes distintas, la ley externa y la segunda del cuerpo.

Es decir, denotamos con el mismo signo el punto al producto de un escalar por un vector que es un vector y al producto de dos escalares que es otro vector. Lo mismo ocurre con el signo más. Se utiliza para suma de vectores y suma de escalares.

Exactamente. Por eso hay que distinguir con los procedimientos dichos antes los vectores de los escalares. Y por eso designamos los vectores por A, B, C , etc., y los escalares por alfa, beta, gamma, etc.

Voy a repetir entonces la definición de espacio vectorial. Serán dos conjuntos, V y K , tales que V es grupo abeliano y K , cuerpo conmutativo. Se define una ley externa de K por V en V , y esta ley tiene cuatro propiedades.

Entonces se dice que V tiene estructura de espacio vectorial sobre K . ¿No enuncia las cuatro

propiedades que verifica la ley externa? No voy a decir las propiedades que cumple, por creer que el medio en que nos encontramos no es apropiado para enunciarlos. Pienso que es mejor que ustedes miren y estudien en cualquier manual estas propiedades, pues así las entenderán bien. Entonces se dice que V es espacio vectorial sobre K , si V es un grupo abeliano, K un cuerpo conmutativo, y existe una ley externa de K por V en V , que cumpla cuatro propiedades.

¿Esta es la definición de espacio vectorial? Perfectamente. Esta es la definición de espacio vectorial. Quiero precisar que habitualmente el cuerpo K que se utiliza es el cuerpo de los números reales.

Además, como ya habrán observado, no hemos puesto ningún ejemplo. Esto se debe a que los ejemplos más sencillos no son apropiados para explicarlos en una emisión radiofónica. También ahora les remito a ustedes a cualquier manual que trate de espacios vectoriales donde encontrarán ejemplos aclaratorios.

Entonces completaremos el tema de hoy mirando las propiedades de la ley externa y ejemplos en nuestro libro. Muy bien. Y los próximos días continuaremos estudiando cuestiones referentes a este tema.