

AC 10 98

Hola, buenas noches, un día más les damos la bienvenida al tiempo del curso de acceso directo a la universidad para mayores de 25 años, el CAT. Les acompañamos durante media hora de lunes a viernes con la intención de ayudarles a preparar todas las asignaturas que conforman su currículum. En el programa de esta noche, matemáticas básicas, nos acompaña el profesor Eduardo Ramos.

Con él hablaremos de los capítulos 10 y 11, que nos hablan del cálculo de probabilidades y estadística. La ciencia siempre trata de encontrar las leyes que rigen los fenómenos que observamos. Hay una clase de fenómenos que permiten prever cuál va a ser el efecto producido en otros fenómenos.

Sin embargo, se dice que el resultado es consecuencia del azar, pero el azar está sometido a leyes. Esta noche vamos a ver las dos especialidades de la matemática que abordan este tipo de leyes no necesarias, el cálculo de probabilidades y la estadística. Para hablar de todo ello, de los capítulos 10 y 11, nos acompaña el profesor Eduardo Ramos.

Muy buenas noches. Buenas noches. La primera pregunta podría ser si se puede lograr con el cálculo de probabilidades predicciones relativamente precisas acerca de los fenómenos aleatorios.

Bien, lo primero que convendría explicar es qué significa fenómeno aleatorio. En la naturaleza observamos dos tipos de fenómenos en general. Por ejemplo, si observamos que si un líquido se calienta, entonces se evapora.

El efecto de añadir calor a un líquido produce, perdón, la causa de añadir calor a un líquido produce el efecto de evaporarse. Es algo que se produce siempre de la misma manera, cuando las circunstancias son las mismas. Es un fenómeno que llamamos determinista.

A una causa igual le corresponde un determinado efecto. En cambio, hay otro tipo de experimentos cuyo comportamiento es un poco diferente. Por ejemplo, si tenemos un dado con sus seis caras y lanzamos en una ocasión el dado, saldrá, sabemos, uno de los seis resultados.

El 1, el 2, etcétera, el 6. Si repetimos el experimento de lanzar el dado con las mismas circunstancias, con la misma fuerza en el lanzamiento, sabemos que pequeñas fluctuaciones como corrientes de aire, variaciones minúsculas en la fuerza con que se lanza el dado, produce un efecto totalmente alejado del resultado anterior. Pensamos que hay una mano oculta, algo que controla el resultado de lanzar el dado. Ese algo el hombre le llamó el azar.

Y este tipo de experimentos que gobierne el azar, en los cuales influye el azar, se le llaman experimentos aleatorios. La palabra aleatorio viene de la palabra latina alea, que como seguramente muchos saben, significa suerte. El hombre conoció desde mucho tiempo, desde

hace muchos años, que la suerte, situaciones como esta de lanzamiento de dados estaban gobernadas por la suerte.

Pero no fue hasta muy metido la edad moderna que el hombre se empezó a preocupar por cómo resolver científicamente el análisis de problemas en los que se estudiaban fenómenos gobernados por el azar. Y precisamente intentando responder a preguntas que se podían observar o cuestiones que se podían observar en el lanzamiento de dados, de juegos de dados, un matemático que se hizo uno de los primeros pasos del cálculo de probabilidades en un libro que se llama *Ars Coyectanti*, precisamente el arte del lanzamiento de dados. Esta es la cuna del cálculo de probabilidades, que es la respuesta matemática, la respuesta científica en definitiva, al estudio de los fenómenos aleatorios.

¿Qué pretende el cálculo de probabilidades? Y respondo a la pregunta que me hacías hace un momento. Precisamente el cálculo de probabilidades intenta encontrar leyes que no tienen la característica de ser necesarias como los fenómenos deterministas, pero sí tienen algo que informarnos acerca del comportamiento de los fenómenos aleatorios. Estas leyes hacen referencia a los resultados que pueden predecirse cuando un experimento aleatorio se efectúa un número indeterminado de veces.

Volviendo al ejemplo del dado. Lo sabemos, nadie lo duda, sin duda, que el resultado de un lanzamiento determinado de un dado es impredecible. Puede salir un 1, puede salir un 2, etc.

Pero sin embargo, todos tenemos la sensación, y aceptamos de buen grado, que si se lanza un número indeterminado de veces, pongamos 6.000 veces un dado, el número de 1s que saldrá, el número de 2s que saldrá está alrededor de 1.000, y muy pocos aceptarían que el número de 1s que saldrá está alrededor de 100. Esta información no tiene la misma precisión que la que tiene la afirmación, cuando un líquido se calienta, se evapora. Pero sin embargo, el saber que el número de 1s que saldrá cuando tiramos 6.000 veces un dado estará más cerca de 1.000 que de 100, no deja de ser una información importante, y no debe despreciarse.

El precisar cuál es el alcance de esta información es precisamente el objeto del cálculo de probabilidades. Pero creo que debiéramos empezar por lo que es la probabilidad, es decir, por el concepto de probabilidad. Bien, como he dicho, las leyes del azar pueden admitirse como una ley empírica como esta.

Cuando se efectúa un número ilimitado de veces un experimento aleatorio, las frecuencias de cada uno de los acontecimientos posibles, es decir, el número de veces que salen los posibles resultados que pueden darse al realizar un experimento aleatorio, tienden a estabilizarse en unos ciertos valores fijos. Esta es una ley empírica. Bueno, pues esos valores fijos hacia los que tienden a estabilizarse el número de veces que se produce un acontecimiento de los posibles de realizar un experimento aleatorio, se eleva a la categoría de probabilidad de ese resultado o de ese acontecimiento posible.

Entonces, la probabilidad, evidentemente, al ser la frecuencia, por supuesto, relativa, es decir,

con el ejemplo del dado, el número de veces que ha salido el 1 dividido por el número de veces que se ha lanzado el dado, esa frecuencia relativa, teórica, por supuesto, en una serie ilimitada, que será un número entre 0 y 1, es el concepto de probabilidad. Mide, de alguna manera, el grado de verosimilitud de cada uno de los acontecimientos posibles que pueden darse al efectuar el experimento aleatorio. ¿Cuál es el modelo matemático de los sucesos aleatorios? Bueno, una vez aumentadas estos preliminares sobre los sucesos, los experimentos aleatorios y la idea intuitiva de probabilidad, las matemáticas lo que hacen es construir un formalismo para darle cobertura a este tipo de ideas intuitivas.

Entonces, lo primero que hay que hacer al observar un experimento aleatorio es observar los resultados posibles, cada una de las posibilidades que pueden darse al efectuar el experimento. En el caso del dado que estamos manejando, pues son los 6 resultados que pueden salir. Entonces, a ese conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio se le llama espacio de posibilidades.

Además de esos resultados posibles, digamos, elementales, es posible contemplar otro tipo de acontecimientos más complejos. Por ejemplo, al tirar un dado podemos observar si el resultado es un número par o un número impar. A este tipo de resultados más complejos se le llaman sucesos.

Y entonces, junto con el espacio de posibilidades tenemos un conjunto de posibles sucesos, que en esta primera aproximación que hacemos en este curso al problema consiste simplemente en el conjunto de partes del conjunto resultados posibles, del conjunto que suele denotarse con la letra griega omega. Dentro de este conjunto de sucesos hay una serie de operaciones razonables, como son la unión, la intersección, la complementación de sucesos, cuyo resultado es otro suceso. Entonces, el conjunto de posibilidades, el espacio omega, y los sucesos o su conjunto de estos espacios de posibilidades forman el modelo matemático de los sucesos aleatorios.

Una vez identificada la familia de sucesos correspondientes a un determinado fenómeno aleatorio, ¿cuál sería el modelo matemático de la probabilidad? Sí, no llega sólo con tener analizado o bien detallado qué resultados son posibles y combinaciones de esos resultados posibles, sino que lo que nos interesa desde el punto de vista del cálculo de probabilidades es asignar una valoración del grado de cumplimiento de cada uno de sus sucesos, es decir, tener una idea de con qué probabilidad, si ya estoy de acuerdo, de cada uno de los sucesos del espacio de sucesos. Bueno, entonces, esa valoración se le llama probabilidad. Formalmente, es una aplicación del conjunto de sucesos, es decir, en este contexto del conjunto de partes de omega, que me había dicho antes, en el intervalo $0,1$.

Esa valoración, digamos que está normalizada, tiene que ser un número entre 0 y 1. Esto es un convenio, como podría haber sido otro o cualquiera, para tener una idea de la posibilidad absoluta de que no se cumpla una cosa o la posibilidad segura de que se cumpla otra, en los dos extremos. En un extremo se le será el 0 y en el otro extremo será el 1. Entonces, una

función definida en el espacio de sucesos con valores en 0 y 1 es, en principio, una probabilidad. Claro que la teoría les exige algunas condiciones técnicas, algunas condiciones técnicas que vienen un poco justificadas en el texto.

En esas condiciones técnicas, en definitiva, se resumen en dos, que es que si se consideran dos sucesos, A y B , que sean disjuntos, es decir, que no tengan ningún suceso elemental en común, que no puedan darse simultáneamente, entonces la probabilidad del suceso conjunto del suceso unión es la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos que lo forman. Esa es una de las propiedades que se exige a la probabilidad. Y la otra propiedad que se le exige es que la probabilidad del suceso seguro, es decir, del conjunto de todas las posibilidades del conjunto ω , sea precisamente 1. Esto es bastante intuitivo.

1 ha de ser la probabilidad de algo que ocurre siempre. Entonces, con estas dos propiedades, y la idea de que es una aplicación del conjunto de las partes de ω en cero y uno, caracteriza a una probabilidad. ¿Y cuáles son los problemas de asignar probabilidades? Bien, acabamos de explicar los ingredientes del modelo matemático de los sucesos y la probabilidad.

Un conjunto de sucesos elementales ω , el conjunto de las partes de ω , o sucesos posibles, y la probabilidad definida sobre ellos. Al par ω , P , se le llama espacio de probabilidad, y es la descripción matemática completa de un experimento aleatorio. A partir de aquí, se puede empezar a trabajar matemáticamente con conjuntos, funciones, aplicaciones, en una terminología y en un lenguaje que ya nos es familiar.

Sin embargo, hay un paso previo, hay un problema previo, que tiene que ver con aspectos que no son estrictamente matemáticos, pero que son esenciales si se quiere construir un modelo y una teoría que tenga ciertos visos de ser aplicable. Me estoy refiriendo al problema de asignar probabilidades a los sucesos, o dicho en términos un poco más técnicos, al problema de ajustar el modelo. En esencia, se trata de ver de qué manera se pueden extraer del azar, de los mecanismos de azar, algunas reglas para dar a cada suceso un número real comprendido entre 0 y 1, un valor real, es decir, para cómo se puede asignar la probabilidad de un determinado suceso.

En esto es difícil dar reglas fijas o reglas escritas, porque hay que acudir al sentido común y al análisis detenido del experimento aleatorio que estemos considerando. Sin embargo, hay una posibilidad o una norma que resulta útil en muchas ocasiones, si bien hay que tener cuidado de aplicarla de manera consciente y de manera muy objetiva. Me estoy refiriendo a la llamada técnicamente o conocida como regla de Laplace.

La idea consiste en describir el experimento aleatorio de manera que sea razonable, que sea plausible, aceptar que todos los sucesos elementales que pueden darse tienen la misma probabilidad. Entonces, si n es el número de esos posibles sucesos elementales, la probabilidad de cada uno de ellos será 1 dividido por n . De esta manera, el problema de asignar probabilidades a un determinado suceso es bastante simple. No hay más que contar el número de sucesos elementales que lo integran, entonces la probabilidad de ese suceso será el

cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Esta regla del cociente o regla de Laplace es una idea muy sencilla, muy útil para asignar probabilidades a sucesos. Pero bien entendido que tenemos analizado el experimento aleatorio de tal manera que los sucesos elementales que lo integran pueden considerarse equiprobables. Si esto no es así, corrimos el riesgo de aplicar la regla de manera errónea.

Pues vamos a continuar pasando al capítulo 11, la estadística. Entre todas las ciencias matemáticas, la estadística es la más cercana a las preocupaciones y problemas del hombre de hoy y además está de muchísima actualidad. Pero en vez de empezar por la actualidad debemos hacer un poco de historia.

Sí, quizás alguien ha dicho que el pensamiento del hombre moderno de la sociedad occidental es un pensamiento estadístico. La estadística, en definitiva, recurre al número como soporte para hacer afirmaciones. Etimológicamente, estadística significa la ciencia del Estado.

En el Estado, en este contexto, era un conjunto de números. El número de individuos que lo integraban, el número de cabezas de ganado que formaban las posesiones del Estado, el número de tierras de labor o tierras de secano. Todas estas estadísticas, en definitiva, todas estas colecciones de números, que sin duda tenían un objetivo bastante prosaico, que era cuantificar los impuestos que debía pagar cada uno de los súbditos de ese Estado, pues dieron origen a la ciencia que gobierna el mundo de aquellas realidades, de aquellas observaciones cuyo soporte físico es un número, que pueden cuantificarse, que pueden materializarse en un valor numérico.

Tal es así que la mayor parte de las disciplinas actuales, que son quizás fruto del pensamiento de las preocupaciones del hombre más cercanas, como son el mundo de la psicología, el mundo de la sociología, el mundo de la economía, están muy influenciadas y muy dominadas por las técnicas estadísticas. Y quizás la parte de estadística sea la parte del curso más útil para todos aquellos alumnos que van luego a estudiar una carrera como pedagogía, como psicología, incluso como economía, porque entre los métodos de estas disciplinas y de estas ciencias ocupan un lugar muy preponderante los métodos estadísticos. ¿Y a qué se denomina población y muestra? Bien, población es el conjunto de objetos sobre los que se está haciendo la experimentación, es lo que se pretende estudiar.

Muestra es un subconjunto de esa población. Y variable estadística, que estoy diciendo, y es la cualidad de la estadística, que representa las poblaciones de individuos mediante números o mediante unas propiedades o características que pueden presentar o no los individuos que forman esa población. Bueno, pues esas cualidades o características que pueden presentar a esos individuos se les llama variable estadística.

Cuando uno estudia una población bajo la óptica del número de elementos que verifican tal o cual propiedad o presentan tal o cual característica, la idea más elemental o más burda sería examinar todos los elementos de la población. A eso se le llama realizar un censo. Una idea un

poco más inteligente, en muchas circunstancias, es no examinar todos los elementos de la población, sino unos cuantos de ellos, una muestra.

¿Por qué razón conviene hacer esto? Hay muchas. Desde luego, si la población es grande, es muy numerosa, no parece rentable, no parece económico el estudiar, para cada problema que pueda plantarse sobre esa población, todos los elementos, todos los individuos de la población. En otras circunstancias puede ocurrir, como, por ejemplo, cuando se examina la resistencia de un determinado material o cuánto dura, por ejemplo, una bombilla o un aparato eléctrico, el proceso de examinar el elemento de la población puede llevar a la destrucción de ese elemento, con lo cual estaríamos en una situación absurda.

Para examinar o estudiar una población tendríamos que destruir los elementos de la población. En esos casos, y en otros muchos que es fácil concebir, se impone el estudio de un subconjunto de la población que se llama muestra. ¿Cuáles son las clases de la variable estadística? Bien, sobre las posibilidades que se pueden, o las magnitudes, o las características que se pueden estudiar de un individuo de una población que llamábamos variables estadísticas, hay diferentes tipos.

Unas se llaman cualitativas, expresan cualidades de los individuos, cosas como el seso, el color de los ojos, la opinión acerca del voto sobre un determinado partido. Es decir, son los resultados de la observación, son cosas que no se pueden medir, que no se pueden sumar, ni siquiera se pueden ordenar. Es decir, el color de los ojos, azul, verde, no tiene sentido las respuestas hacer operaciones algebraicas con ellas.

Se llaman variables cualitativas o variables nominales. Un paso más es cuando la respuesta, siendo cualidades, tienen un cierto grado de ordenación. Por ejemplo, son las típicas preguntas de opinión.

¿Está usted muy satisfecho, poco satisfecho, poco satisfecho o nada satisfecho con el comportamiento de un determinado, por ejemplo, gobierno? Entonces, en estas variables, este tipo de respuestas, o sea, de categorías en que se pueden obtener al observar la variable en un individuo, no se pueden sumar, efectivamente. Pero, sin embargo, mantienen un cierto orden. Poco satisfecho es menos que muy satisfecho.

Este tipo de variables se llaman ordinales. Y un matiz más rico son las llamadas variables cuantitativas, que pueden expresarse mediante un número que puede manipularse algebraicamente. Por ejemplo, el número de pasajeros de un autobús o el consumo de gasolina de un automóvil cada 100 kilómetros.

Este tipo de variables que se expresan mediante un número, digo, variables cuantitativas, todavía pueden dividirse en dos amplias familias. Las llamadas variables discretas o numerables, que son aquellas que pueden tomar valores discretos como 0, 1, 2, 3, etcétera, pero no valores intermedios como 1,7, 4,3. Y las variables continuas, que son aquellas que, en principio, a priori, conceptualmente, pueden tomar cualquier valor real, cualquier número real.

Por ejemplo, la altura de una persona puede ser 175 centímetros, pero también podemos afinar y decir que son 175,4. Podemos afinar un poco más y decir que son 175,43. O, conceptualmente, puede ser cualquier número real.

Recordemos el concepto de número real cuando estudiamos la lección. Claro que, desde un punto de vista práctico, como las medidas se tienen que expresar con un número finito de cifras decimales, no hay, de hecho, en la práctica, no podemos obtener cualquier valor real. Pero eso no nos impide considerar, conceptualmente, a ciertas variables como continuas, es decir, como las variables que pueden tomar cualquier valor posible dentro de un determinado intervalo.

¿Y el concepto de frecuencia? ¿Cuál es? Bien, entonces, el objeto de la estadística es adquirir información en forma de números sobre una determinada población. A cada individuo de una población le mido una característica expresada mediante un número. Es el ejemplo que acabo de poner.

A cada individuo de una determinada población le mido su altura expresada en centímetros o en metros, 175. Y, después de hacer eso, para toda la población, para toda la colección de individuos, obtiene una masa bruta de números. Obtiene un número por cada uno de los individuos de la población.

Con eso, poco se puede hacer. No da mucha más información saber, tener, disponer de esa masa bruta de números que disponer de los individuos en sí mismos. Y, entonces, el objeto de la estadística es resumir esos números, esa masa bruta de números, en algo que sea más manejable.

La primera idea que se le ocurre a la estadística, o que se nos ocurre de manera intuitiva, es contar cuántos individuos toman un valor determinado en una determinada variable que estamos observando. Por ejemplo, si observamos una variable como el número de hijos en un grupo de familias, nos pueden salir números como 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Entonces, lo primero que podemos es contar cuántas familias tienen 0 hijos, cuántas familias tienen 1 hijo, cuántas familias tienen 2 hijos, etc.

En definitiva, contar la frecuencia del número de familias que tienen 0 hijos, 1 hijo, 2 hijos, etc. La frecuencia de los posibles valores de la variable. La frecuencia del 0, la frecuencia del 1, la frecuencia del 2, etc.

Ese número de veces que se repite un valor de una variable se llama frecuencia absoluta. Tenemos algún pequeño prejuicio sobre esta técnica, porque cuando el número de elementos de una población es, por ejemplo, 100, y el número de elementos de otra población es 300, la frecuencia absoluta de lo que puede ocurrir en una población y lo que puede ocurrir en la otra es bastante dispersa. No tenemos una idea relativa o aproximada de lo que ocurre en las dos poblaciones.

Por eso, en la estadística es frecuente recurrir más que a la frecuencia absoluta a la frecuencia relativa, que es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de elementos que se observan en la población. Con esto tenemos un número normalizado entre 0 y 1 que nos da una idea de referencia muy buena cuando se comparan poblaciones diferentes. Y entonces, tenemos resumida la masa bruta de datos en una tabla de dos columnas, por decirlo así.

Por un lado, los valores posibles de las variables y en la otra columna las frecuencias relativas de cada uno de esos posibles valores. Esta tabla, en su conjunto, se llama la distribución de la variable, la distribución de frecuencias relativas. Desde luego, este tema de la estadística me parece muy interesante y, además, muy actual.

Y sé que queda mucho que decir y muy poco tiempo. ¿Nos podrías resumir lo más que se pueda en estos dos minutos? Sí, es una lástima no poder disponer de más tiempo con estos temas tan interesantes como son, cómo la estadística recurre a técnicas para resumir masa bruta de datos. Te estaba diciendo que la primera es formar una tabla de frecuencias.

Hay otras ideas que también son muy gráficas. Las ideas de hacer representaciones gráficas como diagramas de sectores, diagramas de barras. Las ideas de resumir en unos cuantos números que representen, de alguna manera, toda la tabla, como son la media aritmética, la varianza, el coeficiente de variación.

Todavía más, todavía nos podríamos entrar a considerar los problemas de cuándo se consideran simultáneamente dos variables, como pueden ser el peso y la altura de un determinado grupo de personas. Ahí podríamos analizar cómo unas variables varían conjuntamente con otras, cómo van juntas, cómo es la asociación de esas variables. En fin, es todo un mundo muy actual, muy interesante, relativamente extenso, y que hoy no vamos a tener la oportunidad de comentarlo con detenimiento.

Quizás la recomendación que podemos hacer es que se lean los estudiantes el capítulo 11 del libro, que creo que es un capítulo muy detenido, muy reposado, en el que se comentan con bastante detenimiento todo este tipo de cuestiones. Estoy seguro que esta lectura será muy provechosa para todos los alumnos, en particular, como he dicho antes, para aquellos que sigan carreras como Pedagogía, Psicología, etc., carreras en donde los métodos estadísticos son actualmente una herramienta poderosísima. Y ya, para acabar, nos queda solo un capítulo, el capítulo número 12, también de un tema muy interesante y muy actual de los computadores.

Bien, eso lo dejaremos para el próximo programa. Este y también el del examen final, ya los alumnos deben estar preparándose. Sí, sí, todavía quedan unos meses o unos pocos días, pero ya es cuestión de ir pensando en el momento de rendir cuentas.

Pues muy bien, despedimos Matemáticas Básicas y también despedimos el curso de Acceso. Muchas gracias a todos y muy buenas noches. Mañana volveremos de nuevo en esta misma emisora y a nuestra hora habitual, 8 y media de la tarde, 7 y media, en la Comunidad Canaria.

Nuestro primer espacio será Revista de Derecho. Continuaremos con el informativo semanal de la UNED. Por último, el curso de Acceso, que nos llevará hasta las 11 de la noche.

Gracias por su compañía, que pasen una feliz noche. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org