

AC 10 94

Hola, buenas noches. Les damos la bienvenida al tiempo del curso de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Un día más les acompañaremos durante media hora con informaciones de las distintas asignaturas que conforman este curso.

Si no pueden oír o grabar estos programas deben saber que las emisiones de la UNED se envían a los centros asociados en casete. En la mayoría de los centros existe servicio de préstamo a disposición del alumno. Esta noche serán matemáticas básicas la asignatura que ocupe nuestro tiempo.

Entre los objetivos de esta materia están los de adquirir los conocimientos matemáticos imprescindibles para un universitario. En la compañía del profesor Eduardo Ramos veremos las lecciones segunda y tercera que nos hablan de los números racionales y las ecuaciones. Vamos en nuestro programa a comentar los capítulos segundo y tercero del libro de texto de matemáticas básicas.

Para ello nos acompaña el profesor Eduardo Ramos. Muy buenas noches. Buenas noches Isabel y buenas noches a todos nuestros estudiantes.

Agradecerle su presencia ahí detrás de las ondas escuchándonos a través de la radio de Radio Nacional. Hasta ahora hemos hablado de números naturales y de números enteros. Pero con estos números es imposible resolver muchas cuestiones.

Por tanto la primera pregunta que se plantea es ¿qué es un número racional y qué tipo de cuestiones resuelve? La verdad es que la complejidad del pensamiento humano de la organización social que tenemos los humanos nos pone, nos ha puesto a lo largo de la historia siempre nuevos retos, nuevas situaciones a las que teníamos que dedicar esfuerzo intelectual para resolver. Como hemos visto en el programa anterior, con los números enteros éramos capaces ya de resolver el problema de la resta. La diferencia entre dos números enteros es siempre un número entero.

Pero habíamos dejado pendiente el problema de la división. Es fácil plantearse alguna situación en que no es posible encontrar la solución exacta, no hay manera de hacer la división entre los números enteros. Por ejemplo, si tenemos 12 balones y los tenemos que repartir entre 5 equipos, no parece que haya una solución equitativa que deje a todos los equipos en las mismas condiciones.

No hay forma de repartir 12 balones que no se pueden romper, que no se pueden trocear entre los 5 equipos. Sin embargo, si nos planteamos otro problema, como puede ser el repartir una hectárea entre 5 agricultores, ya vislumbramos que el problema tiene visos de tener solución. La primera pregunta que nos hacemos es ¿por qué utilizar la hectárea? ¿Por qué tenemos que dividir 12 entre 5? Que es lo que no nos da exacto.

¿No será posible considerar una unidad de medida más pequeña? ¿No podemos considerar el metro cuadrado, por ejemplo? Si consideramos el metro cuadrado como unidad de reparto, el problema que tenemos que plantearnos es repartir 120.000 metros cuadrados, ya que una hectárea son 10.000 metros cuadrados, entre los 5 agricultores. Y aquí sí que el problema ya parece tener solución. Repartimos 120.000 metros cuadrados entre 5 agricultores y resulta que podemos encontrar una solución que es darle a cada uno 24.000 metros cuadrados.

Así que hemos descubierto cuál es el mecanismo de solución, que es reconsiderar nuestra unidad de medida. Dejarnos de pensar en esa unidad tan grande como la hectárea y tomar una unidad más pequeña de medida como el metro cuadrado. Un ejemplo similar.

Si queremos repartir 3 litros de leche entre 5 niños, tampoco encontramos la manera de dar un número exacto de litros de leche a cada niño. Pero si consideramos una unidad más pequeña que el litro, como puede ser en la quinta parte de un litro, ya vemos que tenemos entonces 15 quintas partes de un litro en los 3 litros y ya sí encontramos una solución que es darle 3 de esas quintas partes a cada niño. Es decir, tenemos que dar a cada niño tres quintos de litro.

Llegamos así al concepto de número racional o fracción. Fracción es sinónimo de quebrado. ¿Es lo mismo una fracción que un quebrado? Efectivamente.

Fracción, quebrado, número racional, son distintas maneras de representar la misma cosa. Simbólicamente y tradicionalmente estos números se representan como un par de dígitos o de números naturales o números enteros que se suelen separar con una raya al medio. El número que está debajo de la raya representa el número de partes en que se divide la unidad.

Por eso se dice que denomina la unidad de medida y se llama denominador. Y el número que está por encima de la raya representa el número de partes que se toman de esas en que se ha dividido la unidad y por lo tanto se dice que es el numerador, el numerador de la fracción. Entonces tenemos la manera tradicional y simbólica más seguramente antigua de representar un número fraccionario o un quebrado es como un con un par de símbolos, un número arriba y otro abajo.

Se pasa por una raya, numerador y denominador. ¿Pero hay diferentes maneras de representar la misma fracción de la unidad? Efectivamente, si seguimos el hilo de lo que vamos diciendo, si yo digo divido la unidad en dos partes y tomo una, es lo mismo que si la divido en cuatro y tomo dos, es lo mismo que si la divido en seis y tomo tres, es decir, un medio es lo mismo que dos cuartos, es lo mismo que tres sextos. Todas estas fracciones representan al mismo número fraccional y es la mitad de una unidad y se dicen que son equivalentes.

Hay una manera muy sencilla de averiguar cuándo dos fracciones son equivalentes. Basta multiplicarlas en cruz. Multiplicamos el numerador de una por el denominador de la otra en cruzado y si da el mismo resultado las dos fracciones son equivalentes.

Cualquiera de ellas sirve para representar al mismo número racional. Además de las fracciones,

o sea, en fracciones también podemos considerar las fracciones negativas. Por ejemplo, la fracción menos un medio simboliza que nos falta la mitad de una unidad para tener cero.

Entonces, al igual que consideramos números negativos, al hablar de los números naturales y los números enteros, podemos considerar fracciones negativas. Hay, por lo tanto, fracciones negativas. ¿Y qué operaciones se pueden hacer con las fracciones? Bueno, pues con las fracciones completamos ya el problema de operar.

En el conjunto de números racionales todas las operaciones son posibles. Podemos sumar fracciones y restarlas, que es la misma operación o similar operación. ¿Cómo se suman fracciones? Pues se trata de homogeneizar las cosas.

Se trata de que nos estemos refiriendo a las mismas divisiones de la unidad. Entonces, tenemos lo primero que vigilar que las fracciones que vamos a sumar tengan el mismo denominador, simbolicen el mismo reparto de la unidad. Cuando hemos conseguido esto, reduciéndolas a un común denominador, sino buscando una fracción, fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador, que eso siempre es posible, la suma o la resta consiste simplemente en sumar o restar los numeradores.

En cuanto a la multiplicación y a la división, las cosas también son bastante sencillas. Por ejemplo, si queremos multiplicar, vamos a considerar en primer lugar el problema de multiplicar un número entero por una fracción. Por ejemplo, multiplicamos el número 6 por la fracción tres séptimos.

Aquí la idea es simplemente repetir sumando seis veces la fracción tres séptimos. Como ya sabemos sumar fracciones, que es lo que acabo de decir, sumamos seis veces tres séptimos. Tres séptimos más tres séptimos más tres séptimos, seis veces.

En definitiva, sumamos los numeradores 3 más 3 más 3 más 3, seis veces. Es decir, multiplicamos 6 por 3 y resulta que multiplicar la fracción tres séptimos por el número entero 6 es la fracción 18 séptimos. Para dividir, pues muy similar.

Vamos a considerar el problema de dividir una fracción entre un número entero. Por ejemplo, dividimos la fracción tres séptimos entre 5. Este problema, ¿cómo lo podemos considerar? Podemos hacer lo siguiente. Dividimos la unidad en siete partes y tomamos 3. Y a ese resultado lo dividimos en cinco partes.

Y el resultado es lo que andábamos buscando, dividir tres séptimos entre 5. Pero también podemos pensarlo de otra manera. Dividimos la unidad en siete partes y luego a cada una de esas siete partes a su vez la dividimos en cinco partes. Es decir, hemos conseguido dividir la unidad, si hacemos una rápida cuenta, en 35 partes.

7 por 5. Y a continuación de esas 35 partes tomamos 3. Es decir, que el resultado de dividir la fracción tres séptimos entre 5 es la fracción 3 dividido por 35. Y con esto, como se hacen las cosas en matemáticas, ya sabemos mucho. Porque ahora para multiplicar una fracción por

otra, por ejemplo, seis quintos por tres séptimos, lo que hacemos es multiplicar primero por 3 al seis quintos y luego dividirlo por 7. Como eso ya acabamos de decir cómo se hace, ya tenemos resuelto el problema de multiplicar una fracción por otra.

Y nos queda la última operación que es la división. Pero esto también tenemos un modo fácil de resolverlo. Si nos fijamos, dado una fracción cualquiera, A dividido por B, inmediatamente podemos considerar su opuesta, es decir, la que cambia el numerador por el denominador y recíprocamente la fracción B partido por A. Entonces es intuitivo ver que dividir una fracción A partido por B entre otra fracción C partido por B es lo mismo que multiplicar la primera por la recíproca o inversa de la segunda.

Y como eso ya lo sabemos hacer, pues ya tenemos también resuelto el problema de la división. En definitiva, ya sabemos sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones. Ya tenemos resuelto todos los problemas de operaciones en el conjunto de los números fraccionales o los números quebrados.

En el primer programa, cuando hablábamos de los números naturales y de los números enteros, dejamos la división precisamente para hoy, para este programa. Entonces ya tenemos resuelto del todo el problema de la división. Bueno, me falta avisar de una pequeña cautela.

Hay algo que no se puede hacer nunca, que es dividir por cero. No tiene sentido dividir algo entre nada. Es decir, la única cosa que no se puede hacer en ningún conjunto de números es dividir por cero.

Salvo eso, todos los problemas de operaciones con los números racionales ya están resueltos. Además de las fracciones, ¿hay otras formas de representar un número racional? Sí, hay otras ideas, otros símbolos, otras maneras simbólicas de representar ese concepto abstracto que es unas cuantas partes tomadas de una división de un todo. La más, digamos, sistemática o parecida a la forma normal de representar los números en un sistema de numeración es la que podemos llamar expresión decimal de un número racional.

Cuando hablamos de cómo se representaba un número natural o un número entero en un sistema de numeración cualquiera, veíamos que la técnica consistía en agrupar los objetos en colecciones de uno, colecciones de diez, colecciones de cien, colecciones de mil, y luego ver cuántos grupos de esos de cien objetos podíamos, de diez objetos, cien objetos, mil objetos, un objeto podíamos formar con las colecciones que habíamos tomado. Teníamos unos patrones para agrupar que eran uno, diez, cien, mil, etcétera. Estos patrones son demasiado grandes para hablar de números racionales, porque sabemos que los números racionales son todos más pequeños que uno, pero podemos seguir el mismo criterio y en lugar de agrupar las colecciones de objetos en grupos de diez, de cien, podemos considerar unos nuevos patrones tales que diez de ellos sean una unidad, cien de ellos sean una unidad, mil de ellos sean una unidad.

Es decir, podemos agrupar en lo que podemos llamar décimas, centésimas y milésimas, y luego

ya podemos aplicar la misma técnica que hacíamos para representar los números naturales en un sistema de numeración. Haciendo esto conseguimos representar un número racional mediante un sistema de representación decimal. Son los famosos decimales.

Por ejemplo, 17 partido por 25 se puede entender como seis grupos de décimas más ocho grupos de centésimas. Es decir, lo representamos simbólicamente como 0,68. ¿Hay otra manera de definir una fracción? ¿Es mediante porcentajes o tantos porcientos? ¿Cuándo se emplea los porcentajes? Bueno, esto es un uso común, el referirnos a una cantidad fraccionaria utilizando como, pensando que el todo son 100 partes.

Decimos que una cantidad es un tanto por ciento, un porcentaje de otra. Eso, por ejemplo, si decimos el 60%, queremos decir que todo está dividido en 100 partes y tomamos 60. 60% es otra manera de representar a la fracción 60 partido por 100, o en la expresión decimal 0,6.

Esto es bastante usual y bastante práctico en la vida cotidiana y por eso conviene estar familiarizado con ello. ¿Es algo que se utiliza bastante? Por supuesto, estamos todos acostumbrados a que nos carguen el tanto por ciento de IVA y a pagar un porcentaje de nuestros ingresos en concepto de impuestos. Pues hemos visto ya el capítulo segundo y podemos ya pasar al tercero, que es bastante importante.

Las ecuaciones. En las ecuaciones se comprueba la importancia de los cálculos con expresiones literales, es decir, los cálculos donde algunas letras sustituyen a los números. ¿Pero qué tipos de problemas resuelven las ecuaciones? ¿Qué es una ecuación? Si reflexionamos un poco sobre muchas de las cosas que decimos en el lenguaje cotidiano, nos damos cuenta que muchas veces intentamos encontrar, buscar una cantidad que nos resulta desconocida a priori, que no sabemos cuál es, pero de la cual sabemos que tiene que edificar algún tipo de condiciones.

Sabemos que tiene algunas restricciones, sabemos que con esa cantidad algo tiene que pasar. Por ejemplo, sabemos que si nos dicen que una cuenta, una cuenta corriente, una cuenta, una supercuenta, nos da un 12% de interés anual, nos podríamos preguntar si yo quisiera obtener 90.000 pesetas de intereses anuales, ¿cuánto dinero tendría yo que poner en esa cuenta? Es decir, la cantidad desconocida es el dinero que tenemos que poner en esa cuenta, y ese dinero, esa cantidad desconocida, tiene que verificar alguna condición, alguna condición que la tenemos expresada en eso, su 12% ha de ser 90.000 pesetas. Tenemos una manera de ligar números con cantidades desconocidas, eso es en esencia una ecuación, una relación que liga números con cantidades desconocidas.

A esas cantidades desconocidas, como no sabemos cuáles son, podemos recurrir a la argucia y al truco de representarlas con una letra, como no sabemos si es 25, 100 o 20.000, por ejemplo, esa es una letra, es X, y entonces trabajamos con esa letra como si fuera un número, y a partir de ahí ya nos descubrimos todo un mundo sin horizontes para resolver nuestro problema de averiguar esa cantidad desconocida. ¿Pero cuál es el trabajo matemático que se hace con las ecuaciones? Bueno, el trabajo matemático tiene fundamentalmente dos partes. La primera es el ser capaz de traducir a símbolos que incluyan letras y números ese conjunto de condiciones

que le imponemos a nuestra cantidad desconocida.

A la cantidad o los números desconocidos, que también podemos considerar que son varios, junto con los números conocidos, con esas 90.000 pesetas o 12% que decía antes, las ligamos de alguna manera y encontramos una relación en forma de igualdad. A eso le llamamos plantear la ecuación. Una vez plantada la ecuación, el trabajo adicional que hay que hacer es resolverla, es decir, manipular la ecuación como lo veremos, para ser capaces de despejar la incógnita y encontrar la solución de nuestro problema inicial, que era ver cuánto vale la cantidad desconocida.

En resumen, planteamiento y resolución. Sobre el planteamiento, sólo puede decirse que hay que tener cierta habilidad, cierta experiencia. Es una cuestión de práctica.

No hay reglas fijas, porque se trata de resumir en unos pocos símbolos toda la complejidad del lenguaje hablado, todas las características, todos los matices que tiene el lenguaje hablado. Hay que ir despojando de lo accesorio y traducir exclusivamente a letras y números y signo igual. Sobre la resolución, ahí ya podemos decir más cosas.

Hay una serie de técnicas que ahora comentaremos que, hábilmente manejadas, nos permiten despejar la incógnita. ¿Y cómo se clasifican las ecuaciones? Las ecuaciones podemos clasificarlas atendiendo a dos criterios. Uno, el número de incógnitas que aparecen.

Puede ser una ecuación con una incógnita, con dos, con tres, etcétera. Otro criterio es el mayor exponente al que aparece elevado alguna incógnita que presente la ecuación. Es lo que se le llama el grado de la ecuación.

Si el mayor exponente es un 1, se dice que la ecuación es de primer grado o ecuación lineal. Si es un 2, ecuación de segundo grado. Si es un 3, ecuación de tercer grado, etcétera.

Y luego también podemos considerar la posibilidad de que las incógnitas verifiquen más de una condición. Es decir, tengan que verificar simultáneamente más de una ecuación. Tendremos entonces un sistema de ecuaciones.

¿Y cómo se puede resolver una ecuación? Pues lo primero que tenemos que reflexionar es sobre el concepto de solución de una ecuación. Resolver una ecuación es encontrar unos números tales que, al reemplazar con ellos las incógnitas, se cumple la igualdad de los dos miembros. Ese es el concepto de solución.

Y esto es muy sencillo y por otra parte merece una llamada de atención para la hora de hacer ejercicios. Ver si una ecuación está bien resuelta es la tarea más sencilla del mundo. Basta comprobar si el número que nos ha salido, al sustituirlo por los valores de las incógnitas, se cumple la igualdad dada.

Entonces, podemos definir solución de una ecuación como un conjunto ordenado de números, tantos como incógnitas haya, tales que si se sustituye la primera incógnita por el primer

número, la segunda por el segundo, etcétera, el valor del primer miembro de la ecuación es igual a la del segundo. Eso es, repito, el concepto de solución. ¿Existen reglas para resolver ecuaciones? Sí, y para ello lo primero que debemos considerar, la primera idea que debemos introducir es la idea de ecuaciones equivalentes.

Dos ecuaciones se dicen equivalentes si tienen las mismas soluciones. Esta idea es importante porque si nos dan una ecuación y somos capaces de convertirla en otra equivalente cuya solución nos resulte más sencilla, a partir de la solución de esta ecuación equivalente podemos encontrar la solución de la ecuación dada. Entonces, hay fundamentalmente tres reglas de explicación muy natural y muy intuitiva que pueden aplicarse de manera sistemática para encontrar ecuaciones equivalentes de una ecuación dada, con el hábil objetivo de encontrar al final una ecuación cuya solución sea más aparente, con lo cual tenemos resuelto nuestro problema original.

Estas tres reglas podemos enunciarlas de la manera siguiente. La primera, diríamos, si se sumo o resta ambos miembros de una ecuación un mismo número o una misma expresión donde intervengan las incógnitas de la ecuación, se obtiene una ecuación equivalente. Segunda regla, se puede pasar cualquier término de una ecuación de un miembro a otro sin más que cambiarle de signo.

Y tercera regla, si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, la ecuación que resulta es equivalente a la primera. Repito, con la aplicación sistemática e inteligente de estas reglas podemos derivar ecuaciones equivalentes de la ecuación que pretendemos resolver intentando que la ecuación final sea una ecuación cuya solución sea sencilla. Aunque antes se han mencionado las ecuaciones lineales, me gustaría profundizar un poquito más sobre qué es una ecuación lineal y cómo se puede resolver.

Bueno, la ecuación lineal es seguramente la ecuación más sencilla. La ecuación lineal de una incógnita es la ecuación más sencilla que podemos pensar. Tiene la forma ax igual a b . x es la incógnita, a y b son dos números, los números los que sean.

Esta ecuación se resuelve inmediatamente. Si a no es cero, si a es un número que no es cero, entonces como se puede dividir por a , la incógnita x es igual a la fracción que resulta de dividir b entre a . Despejamos x dividiendo el segundo miembro de la ecuación b por el coeficiente por el que está multiplicado la x a . Si a es cero, aquí hay que hacer una pequeña distinción. Si el segundo miembro b es también cero, entonces tenemos una ecuación de la forma cero por x igual a cero, y como cualquier número multiplicado por cero da cero, x puede ser cualquier número.

Entonces esta ecuación tiene infinitas soluciones. Hay infinitas x que resuelven la ecuación. Mientras que si b no es cero, tenemos una ecuación de la forma a por x , perdón, cero por x igual a un número que no es cero, y esto no es posible porque acabamos de decir, sabemos que cualquier número multiplicado por cero da cero.

Entonces esta ecuación no tiene solución. Entonces estos son los tres casos o las tres situaciones que pueden presentarse al considerar una ecuación lineal con una incógnita y que es la solución sencilla. Debemos acabar nuestro programa, pero no me gustaría terminar sin alguna recomendación, sobre todo para el estudio de las ecuaciones.

Bien, no tenemos ya tiempo de detenernos a explicar con detenimiento, incluso por su complejidad un poquito superior, de los sistemas de ecuaciones lineales y los métodos para resolverlos. Pero sí, quiero hacer una llamada de atención y recomendar muy especialmente que se detengan en el estudio de la resolución de sistemas de ecuaciones, que se entretengan, que intenten comprender los métodos para resolver tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, porque es el grado, digamos, es la pregunta más compleja que sobre ecuaciones podemos presentar, plantearnos en este curso. Sobre todo mucha práctica, ¿hay que hacer muchas ecuaciones para saberlas resolver bien? Bueno, hay que tener un poquito de práctica y un poquito, seguramente, de sentido común, de sentido común.

Como podemos comprobar en las unidades didácticas, hay numerosos ejercicios y ejemplos, de los cuales, ya digo, no todos, pero seguramente el mayor número posible de ellos nos ayudarán a tener cierta familiaridad con la técnica de resolución de ecuaciones, con esa habilidad necesaria para plantearse este tipo de problemas que, por otra parte, se nos presentan con muchísima frecuencia en nuestra vida cotidiana. Pues debemos ya despedirnos. Muchas gracias y hasta el próximo programa.

Muchas gracias y a todos por vuestra audiencia. con el profesor eduardo ramos hemos hablado esta noche de los números racionales y las ecuaciones el próximo programa de matemáticas básicas será el 19 de enero y nos ocuparemos de las lecciones 4 y 5 que nos hablan de los números reales y la geometría analítica pero nosotros nos despedimos hasta el lunes deseándoles que pasen un feliz fin de semana la uned les ha acompañado durante dos horas y media el próximo lunes volveremos a nuestra hora habitual y en esta misma emisora con la facultad de filología continuaremos con revista de geografía e historia y matrícula abierta nuestra última media hora la dedicaremos al curso de acceso gracias por acompañarnos y que pasen un buen fin de semana