

AC 15 37

¿No crees que debería hacer uno más? De lunes a viernes estamos entre 11 y 11 y media de la noche, una hora menos en la comunidad autónoma canaria, hoy con matemáticas especiales, vamos a comentar la cuarta unidad didáctica de matemáticas especiales. Y estamos en Radio Nacional de España, Radio 3 en frecuencia modulada y otras emisoras de la red de Radio Cadena Española. De lunes a viernes entre 11 y 11 y media de la noche aproximadamente, una hora menos en Canarias.

Tenemos esta noche un nuevo programa de matemáticas especiales, está con nosotros la profesora Paloma Pantoja Veloqui y vamos a hacer unos comentarios que intentamos sean lo más prácticos posibles sobre la cuarta unidad didáctica, los temas que componen esta cuarta unidad didáctica para orientación de los alumnos. En dos futuros programas ya veremos las dos últimas partes del libro de matemáticas especiales, la quinta unidad didáctica y la sexta unidad didáctica. Buenas noches Paloma.

Buenas noches. Vamos a ver, esta cuarta unidad didáctica, ¿de qué temas consta? Tiene los temas de plano afín, espacio afín, polinomios y fracciones racionales. Bueno, pues entonces vamos a empezar primero con el plano y el espacio afín.

Eso es, porque estos dos temas son de geometría y en ellos se estudian claro conceptos geométricos, pero vistos desde un punto de vista algebraico. Es decir, es una visión algebraica de la geometría, una forma de exponer la geometría mediante expresiones algebraicas. Eso es, entonces en estos temas van a tener mucha relación, vamos a tener que tener en cuenta los espacios vectoriales y los sistemas de ecuaciones lineales que hemos visto.

Me parece que es en la tercera unidad. Exactamente. En la unidad anterior.

Ya se estudiaron los espacios vectoriales y los sistemas de ecuaciones lineales. Bueno, entonces vamos a hablar en primer lugar del plano afín. Bueno, ¿y qué es un plano afín? Vamos a ver la definición.

No vamos a dar la definición porque realmente por radio yo creo que es un poco complicada, pero vamos a decir algunas cuestiones para aclararla. Para definir un plano afín necesitamos un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales de dimensión 2. Vimos ya espacios vectoriales en general. Para el plano afín necesitamos un espacio vectorial de dimensión 2 y un conjunto cuyos elementos llamamos puntos y una aplicación que definimos que la llamamos más.

Tenemos el espacio vectorial, el conjunto de puntos y una aplicación. Entonces esta aplicación, que quizás les resulte a los alumnos un poco difícil de ver, vamos a intentar explicar cómo es. Supongamos que tenemos dos puntos A y B de ese conjunto de puntos.

Si unimos los dos puntos con un segmento y le damos sentido a ese segmento obtenemos un

vector que llamamos V . Entonces la aplicación más, esa que hemos dicho antes, lo que hace es sumarle a un punto A un vector y obtenemos el punto B . La aplicación por tanto sirve para obtener un segundo punto a partir del primero por la aplicación del vector. Eso es. Entonces realmente nosotros lo que tenemos en el plano afín es un conjunto de puntos, pero siempre nos manejamos con vectores.

Yo obtengo un punto a partir de otro sumándole un vector. Realmente viéndolo en un papel es bastante fácil con un dibujo. Esto sería entonces la forma de definir un plano afín.

La verdad es que en el espacio afín hacemos lo mismo. Sumamos a un punto un vector y obtenemos otro punto. Es decir, esto no lo tienen que perder de vista los alumnos para poder entender un poco este tema.

Entonces pasamos ahora ya al sistema de referencia. En los espacios vectoriales los vectores para expresarlos utilizamos una base. Entonces aquí en el plano afín utilizamos un sistema de referencia.

Este sistema de referencia consta de un punto y de una base del espacio vectorial. Por lo tanto de dimensión 2. Es decir, consta de dos elementos. Sí, o sea que el sistema de referencia un poco sirve para utilizarlo como punto de contemplación de todos los elementos de ese conjunto de puntos.

Eso es. Como en los espacios vectoriales todo vector lo podemos referir como combinación lineal de los elementos de la base, pues ahora vamos a expresar siempre los puntos también a ese sistema de referencia. De acuerdo.

O sea, sirve para situar en el plano todos los puntos de acuerdo con los datos del sistema de referencia. Eso es. En la página 15 de este tema está dibujado un sistema de referencia afín para que los alumnos se puedan hacer una idea de él.

En la página 15. Normalmente el punto del sistema de referencia lo designamos con la letra O y lo llamamos origen del sistema de referencia y a la base la designamos con U_1 , U_2 . Dos vectores.

O sea, a la base del espacio vectorial U_1 y U_2 . Entonces si nosotros tenemos un punto que, por ejemplo, podemos llamar A , si unimos ese punto A , que es un punto cualquiera del plano, con el origen del sistema de referencia obtenemos el vector OA . Pues bien, ese vector, como es un vector de los que hemos visto en el espacio vectorial, lo podemos expresar como combinación lineal de los elementos de la base.

Pues bien, tendrá unas coordenadas, ese vector OA , respecto a esa base. Pues bien, a esos dos números le llamamos coordenadas del punto A . O sea que entonces, repasamos, tenemos un punto cualquiera del plano A y entonces hay un vector que se puede definir con respecto al origen. Eso es.

Siempre lo vamos a referir al origen del sistema de referencia. O A. Y entonces para representar ese punto A, pues hay unas coordenadas, que son precisamente las coordenadas del vector OA. La primera coordenada suele llamarse abscisa y la segunda ordenada.

Y esas dos coordenadas se pueden representar entre paréntesis, ¿no? Sí, se suelen representar entre paréntesis y con una coma entre ellas como un par ordenado de elementos, porque realmente son un par ordenado de elementos. Eso sí, el primer número sería la abscisa y el segundo la ordenada. Bueno, entonces, ¿el sistema de referencia de un plano afín es único o puede haber más? De la misma forma que en los espacios vectoriales teníamos muchas bases, no teníamos una única base, aquí también en los sistemas de referencia tenemos muchos sistemas de referencia.

Según tomemos un punto y una base, obtendremos un sistema de referencia diferente. Por eso, las coordenadas de un punto no son únicas. Depende del sistema de referencia que nos estemos refiriendo.

Digamos que estos serían los conceptos algebraicos fundamentales para expresar, en términos algebraicos, lo que es la geometría. Pero ahora ya, dado que tenemos estos conceptos y que hemos utilizado hasta el de base, de un espacio vectorial, y el de vector, y el del origen, y tal, ahora si nos planteáramos cuestiones tales como definir en ese plano una simple figura geométrica, como por ejemplo una recta, ¿qué necesitaríamos para poder definir una recta? Para definir una recta necesitamos un punto y un vector. El vector proporciona la dirección de la recta y el punto, digamos, podemos decir que fija esa dirección.

Es decir, con el vector, como no están fijos, solamente tenemos la dirección. Con el punto ya fijamos todas esas direcciones justamente en un punto del plano. Entonces, para hallar la ecuación vectorial de la recta, vamos a expresar cómo sería un punto cualquiera de esa recta.

Sea x un punto cualquiera de esa recta. ¿Cómo lo obtenemos? Pues le sumamos al punto a una combinación lineal del vector v . Así obtenemos un punto de esa recta. O sea que entonces la representación en el plano de una recta es una ecuación, una ecuación vectorial que está formada por una x que representa el punto y asimismo una combinación lineal que se añade al punto a , que sería el que tomamos como referencia inicial.

Eso es por el que pasa la recta. Porque la x podría ser cualquier punto de la recta. Entonces, a partir de esa ecuación vectorial de la recta vamos a ir obteniendo las distintas formas de la ecuación de la recta.

Pero no hay que olvidar también que podemos definir la recta no solamente con un punto y un vector, sino con dos puntos, ya que a partir de dos puntos nosotros podemos definir un vector. Dados dos puntos también tenemos un punto y un vector. Claro, dos puntos que sería el punto origen y el punto final.

Eso es. Entonces las distintas formas de la ecuación de la recta las obtenemos a partir de la

ecuación vectorial haciendo una serie de cambios. Por ejemplo, si nosotros expresamos en la ecuación vectorial tanto la x como la a como el vector v , es decir, los puntos y el vector en función del sistema de referencia, ponemos sus coordenadas, obtenemos dos ecuaciones paramétricas.

Esa es una primera forma de la recta. Después, si nosotros eliminamos ese parámetro entre las dos ecuaciones, obtenemos la forma continua. Y de aquí se pasa haciendo operaciones a la ecuación implícita.

O sea que hay diferentes maneras de poder definir la expresar la recta de acuerdo con la ecuación vectorial como la planteemos. Normalmente con la ecuación vectorial no trabajamos. Digamos que esa es para definir la recta y ya a partir de ahí podemos trabajar o con las paramétricas o con la ecuación forma continua o con la implícita.

Una pregunta que se puede hacer mucho en cuadernillos, en exámenes finales, es plantearles a los alumnos que expliquen cómo es la dirección del vector. Sí, es muy importante que el alumno vea en cada forma de la recta cuál es el vector dirección. Por ejemplo, en la forma implícita, la forma implícita sería $ax + by + c = 0$.

El vector dirección de la recta esa es el menos b , el de coordenadas menos b . Entonces, bueno, es muy importante que el alumno sepa eso bien para luego. Por ejemplo, si nos piden hallar una recta paralela a esa, ahora veremos a ver las posiciones que pueden tener dos rectas y qué condiciones van a cumplir, pero entonces una recta paralela a ella va a tener mucha importancia saber cuál es el vector dirección de la dada.

O sea, en una ecuación del tipo $ax + by + c = 0$ se coge, digamos, el segundo valor que afecta a la segunda incógnita, se le cambia de signo, menos b , y esa es la primera coordenada, y luego a , que sería el primer valor que afecta a la primera incógnita, a la x , y eso se pone entre corchetes. Esa es la manera de representar las coordenadas, ¿no? Sí, se pueden representar entre corchetes, pero en el libro lo tenemos representado entre paréntesis, es decir, que no hacemos diferencia entre las coordenadas de un punto y las coordenadas de un vector. Bueno, te acabas de referir a las posiciones que pueden tener dos rectas en el plano.

Claro, nos podemos imaginar que esas rectas pueden estar paralelas, se puede haber una intersección de la una con la otra. ¿Cómo esto en este terreno, que es el algebraico, lo podríamos representar? Sí, vamos a suponer que tenemos dos rectas en forma implícita. Por ejemplo, vamos a expresarlas, aunque no sé si lo van a entender bien nuestros alumnos, pero bueno, lo pueden escribir en todo caso, en un papel o lo que sea.

Una primera recta que sería $ax + by + c = 0$, y otra recta $a'x + b'y + c' = 0$. Ya tenemos las dos rectas. Entonces, estas dos rectas, como ven, lo podemos considerar como si fuera un sistema de ecuaciones lineales, donde tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas.

Sí, porque realmente si la primera recta es $ax + by + c$ igual a cero, y la segunda recta es $a'x + b'y + c'$ igual a cero, pues aquí tenemos dos incógnitas, la x y la y . Tenemos los términos independientes en el primer miembro, pero realmente es un sistema de ecuaciones como los que hemos visto hasta ahora. Sí. Entonces, vamos a ver qué casos se pueden dar en este sistema de ecuaciones.

Un primer caso, vamos a hablar primero de la recta, es que las rectas no tengan ningún punto en común. No tienen ningún punto en común las rectas, y entonces se dice que son paralelas. Evidente.

Si son paralelas es porque no tienen ningún punto en común. Sí. ¿Qué significado tiene esto a la hora de ver el sistema de ecuaciones? Pues que no tiene ninguna solución.

Es decir, este sistema de ecuaciones será incompatible. No tiene ninguna solución. Con lo cual es importante recordar lo que hablamos en la charla anterior sobre los sistemas de ecuaciones.

Entonces, ¿qué ocurre en las rectas paralelas? Que los vectores dirección de ambas rectas son el mismo. Es decir, que a y b van a ser proporcionales a a' y b' . De acuerdo.

Porque van a tener el mismo vector dirección. Bien, sí, sí. Entonces, no tendrá solución este sistema, y no podremos hallar ninguna intersección de las rectas.

O sea, que digamos que, de acuerdo con lo que dijimos antes de las coordenadas del vector dirección, digamos que en la segunda ecuación sería menos $b'a$. Y en la primera ecuación sería $b'a'$. No, menos $b'a'$.

Perdón, menos $b'a'$. Eso es. Y entonces son iguales.

Son iguales o proporcionales. Que a/a' igual a b/b' . Pero luego, sin embargo, no va a ser c igual a c' .

Con lo cual, al hallar el sistema de ecuaciones, al intentar resolver, va a resultar incompatible. Bueno, bien. Entonces, ese sería el caso.

Ese es un primer caso. Que las rectas sean paralelas. Otro segundo caso es que las rectas tengan un punto en común.

En ese caso se dice que las rectas se cortan. ¿Qué quiere decir esto a la hora de resolver un sistema si tiene un punto en común? Es que el sistema tiene una solución. Es compatible, determinado, el sistema.

¿Cómo hallamos la solución? Bueno, en el tema anterior hemos visto cómo resolver un sistema de ecuaciones. Ahora resulta mucho más cómodo despejar la x o la y en una ecuación y sustituirla en otra. No utilizar el método que se ha visto en el tema de ecuaciones.

Es muy sencillo y no merece la pena. Simplemente hallamos la intersección de dos rectas,

cuando tienen un punto en común, despejando x o y y sustituyendo. Claro, es que normalmente lo que ocurre es que el sistema de ecuaciones que definen a las rectas no es complicado.

Es muy sencillo y no merece la pena perder tiempo. Perder tiempo por un método largo, porque eso es para utilizar a lo mejor matrices y eso es cuando fuera mucho más complicado. Mucho más largo, de tres ecuaciones con tres incógnitas y todo eso, pero así no merece la pena.

Porque eso es lo que se plantea en el tema del espacio, seguramente. Eso es que es más complicado. Bueno, entonces recordamos que es importante que el sistema sea compatible determinado, entonces es que se cruzan las rectas.

No, perdón, que se cortan. Que se cortan, perdona. Y tienen un punto en común.

Tienen intersección solamente en un punto. Se cortan. Y cuando son paralelas es porque el sistema no tiene ningún punto en común.

Eso es. Y el sistema es incompatible. Un tercer caso es que las rectas coincidan y tienen las dos la misma ecuación.

Eso visto como sistemas de ecuaciones quiere decir que el sistema es compatible indeterminado. Las dos son iguales. Bueno, pues si el sistema era compatible indeterminado es que las dos rectas son las mismas.

Esos son los tres casos que se nos pueden plantear. Y hemos hablado de muchas cosas con respecto al plano afín y a la definición en él de rectas y qué tipos de rectas puede haber. Y concretamente en este tema, ¿el alumno qué es lo que tiene que saber? Pues debe saber expresar un punto respecto a un sistema de referencia y cambiarlo a otro sistema de referencia.

Tiene que saber obtener la ecuación de una recta en cualquiera de sus formas a partir de un punto y un vector o a partir de dos puntos. Hallar una recta paralela a otra. Hallar la intersección de rectas.

Imponer condiciones para que una recta sea paralela a otra. Bueno, todas estas cuestiones que son bastante sencillas. Sí, sí.

Y que seguramente pues hará algún ejercicio en los cuadernillos y en fin estará preparado para el sábado final si le cayera alguna pregunta con respecto a eso. Bueno, y con esto habríamos visto el primer tema. Del plano afín, sí.

Sí, del plano afín. Y ahora me imagino que lo que vamos a tocar, que es el segundo tema de esta unidad didáctica, que es la cuarta unidad didáctica, que era el espacio afín, pues es muy parecido, ¿no? Es bastante parecido. Quizás es un poco más difícil y se le da menos importancia

en cuanto luego a posiciones de recta y plano, que es más complicado.

Y quizás posiciones de dos planos, pero digamos que en principio lo que sí tiene que saber alumno este tema es saber hallar la ecuación de una recta en el espacio, la ecuación de un plano en el espacio y saber hallar, por supuesto, la intersección de dos rectas y la intersección de dos planos. Claro. Es decir, por pura intuición es muy fácil de ver.

Si antes teníamos dos coordenadas, una abscisa y una ordenada para poder definir un punto, pues ahora estamos en el espacio. Eso es. Ahora para definir el espacio afín es exactamente igual que antes.

Necesitamos un espacio vectorial, pero ahora de dimensión 3, un conjunto de puntos y una aplicación más. Con lo cual, por ejemplo, una ecuación de la recta en el espacio. ¿Cómo definiríamos la ecuación de la recta? Necesitamos lo mismo.

Necesitamos un punto y un vector. Pero ahora, claro, ese vector va a tener tres coordenadas. Ese punto va a tener tres coordenadas.

Podría ser, por ejemplo, del tipo $ax + by + cz + d = 0$. Sí, esa sería la ecuación implícita. Todavía no habríamos llegado a ella, pero esa sería, pero vamos, no sería de la recta porque nos faltaría, esa sería de un plano y nos falta ahora definir el otro plano.

Yo creo que vamos a empezar primero definiendo la ecuación vectorial de la recta, si te parece. Bien. Se define de la misma manera que hemos definido la ecuación vectorial en el plano.

Sea, por ejemplo, una recta que queremos definir que pasa por el punto a y que tiene de vector dirección el vector v . Un punto x cualquiera de la recta, ¿cómo lo expresamos? Pues se da, sumándole al punto a , cualquier combinación lineal del vector v . Entonces obtenemos que x es igual a $a + t$ por v , donde t es un número real que va variando y que así de esa forma obtenemos todos los puntos. Bueno, bien, entonces ya tendríamos definido el vector, ¿no? Y entonces, ¿qué más podemos comentar aquí? Bueno, podemos comentar que después de tener esa ecuación vectorial pasaríamos a las ecuaciones paramétricas. ¿Cómo pasamos? Pues de la misma manera que antes, si expresamos los puntos x y a y el vector v en función de las coordenadas vamos a obtener tres ecuaciones.

Antes obteníamos dos ecuaciones paramétricas, ahora vamos a obtener tres ecuaciones, ya que tenemos tres coordenadas. Bien. Esa es una diferencia.

Y luego ya pasaríamos igual. A la forma continua, que va a ser igual, lo que pasa es que vamos a tener tres fracciones de la misma manera que antes teníamos una, y luego pasamos eliminando. A las ecuaciones implícitas.

A las ecuaciones implícitas, que en lugar de ser una como antes, ahora son dos. Entonces, ¿cuál sería un poco el significado de esas dos ecuaciones implícitas? Sí, luego lo vamos a ver, porque cada una de esas ecuaciones implícitas, cada una de esas es la ecuación de un plano. Entonces,

viene dada la ecuación, las ecuaciones implícitas de la recta es la intersección de dos planos.

Dos planos, al hallar su intersección, si tienen intersección, siempre se cortan según una recta. O sea, que visualmente lo vemos. Sí, lo podemos ver muy bien.

Muy bien. Por ejemplo, en una puerta. Claro.

Cuando la abrimos. Claro. Si la abrimos, tenemos la pared, el plano de la pared con el plano de la recta, perdón, con el plano de la puerta, se cortan en una recta.

Que es precisamente la recta donde están los góndoles. No, es como, vamos, como muy lógico además, que es que para definir una recta en el espacio, lo tengamos que hacer mediante el cruce de dos planos. Está muy claro.

Sí, sí, sí. Entonces, así es como vienen definidas las ecuaciones implícitas. Bueno.

Y entonces, las posiciones relativas, que sería lo siguiente a tratar, de rectas, van a ampliarse un poco. Antes teníamos paralelas. De la misma forma las tenemos aquí.

Que se cortan en un punto, igual. Que coinciden, igual. Pero ahora tenemos otro caso, que es el de rectas que se cruzan.

Es decir, que no tienen ningún punto en común, pero que tampoco son paralelas. Es decir, el vector dirección no es el mismo. Como dos aviones que están volando a diferente altura.

Si comparamos sus trayectorias, iban en diferente dirección. Eso es. Serían... El caso del cruce.

Se cruzan. Bueno. Y entonces... Yo creo que ya de rectas... No, no merece la pena, sí.

Lo tenemos visto todo y pasamos un poco a planos. Bueno, sí. Que varía un poquitín, porque ya, ¿qué necesitamos para definir un plano? Vamos a necesitar un punto para fijar ese plano y dos vectores.

Con un punto y dos vectores tenemos definido el plano. También lo podemos definir, claro está, con tres puntos. Bueno, con tres puntos tenemos un punto que necesitamos para definirlo.

Como origen. Para fijarlo, digamos. Y después, dos vectores que los hallamos de esos tres puntos, sacamos dos vectores.

Claro. Es absolutamente lógico. O sea, que necesitemos o tres puntos, o por lo menos a partir de un punto origen, dos vectores.

Para poder definir el plano. Entonces, ¿cómo definimos cualquier punto del plano? Pues de la misma forma que hemos definido cualquier punto de la recta. Sumándole el punto X, ese general genérico del plano, lo obtenemos sumándole al punto A. Podemos elegir un punto A. Sumándole una combinación línea de esos dos vectores.

Entonces obtendremos cualquier punto del plano. Y la cosa se iría complicando más, porque luego habría que ver las posiciones relativas de los planos. O incluso estudiar las posiciones relativas de la recta y del plano.

Pero en fin, el tiempo se nos echa encima, Paloma. Así que tenemos que, vamos a dejar esto de momento. Y vamos a pasar al tema siguiente, que es el de polinomios.

Este tema de polinomios, yo pienso que es bastante sencillo. Aunque tiene muchas demostraciones, que creo que el alumno no debe mirarse. O si acaso mirarlas para ver si no entiende algo.

Pero no las vamos a preguntar. Repito lo que siempre hemos dicho. Entonces, bueno, dejarlo un poco por encima.

Ver bien la definición de polinomio. Cómo se suman polinomios. Cómo se multiplica un polinomio por un número.

Cómo se multiplican dos polinomios. Cómo se dividen polinomios. Y debe saber hallar el máximo común divisor de dos polinomios.

El mínimo común múltiplo de dos polinomios. Y después, también saber dividir, claro, para hallar el máximo común divisor. Tiene que saber dividir un polinomio entre otro.

Y saber descomponerlo en factores irreducibles. Y saber lo que es la raíz de un polinomio. Y operar con ella.

Saber si un número es raíz de un polinomio o no. Estas cuestiones. Vamos a quizá dar alguna definición importante.

Por ejemplo, recordar lo que es el polinomio. Lo que es el polinomio. Que en principio en el libro lo define como una sucesión de elementos de un cierto cuerpo.

Que normalmente suele ser el cuerpo de los números reales. Y que a partir de un término todos son nulos. Esto realmente a lo mejor les puede parecer un poco raro.

Pero luego enseguida en el libro se pasa ya a la notación habitual. De a sub n , x elevado a n . Más a sub $n-1$, x elevado a $n-1$. Etcétera.

Bueno, ¿hay algún concepto importante como el de grado, por ejemplo? Por ejemplo, sí. El grado del polinomio. Que es el índice del último término no nulo.

Y también se llama coeficiente principal del polinomio a dicho término. Y luego decías que se definía la suma y el producto. Sí, sí.

Yo pienso que, bueno, podemos la suma. Pero como es tan difícil decirlo por radio. En el libro viene bien explicado y yo pienso que lo pueden entender.

Entonces podemos volver a insistir en lo que los alumnos tienen que dominar de este tema de polinomios. Tienen que saber máximo como un divisor, mínimo como un múltiplo. Saber descomponer el polinomio en factores irreducibles.

Saber trabajar, saber lo que es una raíz del polinomio. Y trabajar con ella. Es decir, averiguar si un número es raíz del polinomio o no.

Etcétera. Bueno, con respecto a este tema de polinomios no es nada complicado. Si es importante hacer muchos ejercicios podéis seguir los modelos de ejercicios resueltos que aparecen en el propio libro, ¿no? Como ejemplo y también pues aparecen en los cuadernillos.

Es más que nada un tema práctico de hacer problemas. Sí, es muy práctico. Sí, y luego con respecto al último tema, el último que no estaba para comentar.

Lo que tiene que saber uno perfectamente, porque eso es muy importante, es saber descomponer una fracción en fracciones simples. Es sencillo, no tiene grandes dificultades, hay que hacer muchos ejercicios. Pero luego va a ser muy importante para resolver las integrales de fracciones racionales.

Es decir, se hacen precisamente descomponiendo esa fracción en fracciones simples. Es decir, saber descomponer una fracción compuesta en fracciones simples. Y eso sería todo.

Bueno, pues Paloma Pantoja, muchas gracias por estas orientaciones, sobre estos comentarios sobre la cuarta unidad didáctica. Que confiamos sirvan a los alumnos para situar mejor las cosas de lo que estén estudiando. Centrarse más en lo importante.

Y ya nos despedimos hasta el próximo programa en que hablaremos de la quinta y inmediatamente después sexta unidades didácticas. Y ya para terminar, porque ya los exámenes están cerca. Gracias por haber venido y buenas noches.

Buenas noches. ¡Bien! Y así, con acceso a unidades cerramos como es habitual en nuestra programación. Una programación que hoy ha sufrido un retraso de una hora y media, debido a la retransmisión del partido de fútbol Real Madrid-Bayern de Múnich.

Hoy, en la UNED, os hemos ofrecido temas de economía, filosofía y matemáticas. Mañana jueves estaremos de nuevo aquí, a la hora de siempre, nueve de la noche, para analizar diferentes cuestiones relacionadas directamente con la educación. Hasta entonces, un saludo.

Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org