

AC 15 64

Hola, buenas noches, les damos la bienvenida al tiempo del curso de acceso directo a la universidad para mayores de 25 años, el CAT. Un día más les acompañaremos durante media hora con informaciones de las distintas asignaturas que conforman este curso. Si no pueden oír o grabar estos programas, deben saber que las emisiones de la UNED se envían a los centros asociados en casete, en la mayoría de los centros existe servicio de préstamo a disposición del alumno.

Esta noche en nuestro programa Matemáticas Especiales, hablaremos de las seis primeras unidades didácticas, en un programa preparado por el profesor Emilio Gujarance. Y en esta noche en nuestro programa veremos los seis primeros capítulos del libro de texto. En el primer capítulo hablaremos de los números enteros y racionales, pasaremos a los números reales, a los elementos de la teoría de conjuntos, introducción a la combinatoria, introducción elemental a la probabilidad y estadística descriptiva.

Vamos pues a hablar y a abordar de estos primeros seis temas. En este segundo programa sobre Matemáticas Especiales del curso de acceso vamos a hablar de los seis primeros temas del programa, comenzaremos con el primer tema que se denomina números enteros y racionales, la idea de número surge al comparar una cantidad con otra, es decir, como consecuencia de medir una cantidad y puesto que medir una cantidad es compararla con otra a la que llamamos unidad, agregando unidades formamos cantidades que representamos por números. El origen de este concepto es muy difícil de descubrir, hasta el punto de que se experimenta una sensación de bienestar cuando se deja de lado su investigación.

Es una idea muy extendida la que supone que el concepto de número está estrechamente unido al de tiempo, dependiendo ambos de una impresión que despierta en nosotros la sucesión de fenómenos que se verifican a nuestro alrededor y en nosotros mismos. Kahn entre los filósofos y Hamilton entre los matemáticos son los representantes de esta interpretación, otros en cambio opinan que el número tiene más que ver con el concepto de espacio, reduciendo el concepto de número a la simultánea contemplación de diferentes objetos considerados en su conjunto. También hay quien ven en las representaciones de los números la expresión de una especial actitud del espíritu, que es independiente de toda intuición de espacio y tiempo.

Un representante de esta interpretación es Mikowski. La historia de los números negativos muestra que los antiguos griegos no tuvieron noción de ellos, de modo que en este punto no se les puede asignar el primer lugar, como muchos hacen. Por el contrario, puede asegurarse que sus descubridores son los indios, a quienes también se deben el cero y el sistema de enumeración decimal.

En Europa empezaron a usarse en la época del Renacimiento, pero su introducción fue muy lenta, aunque ya Vieta la utilizó completamente. El objeto de este primer tema es introducir al

alumno en algunos resultados básicos de los números enteros y racionales. Se comienza con las operaciones básicas de los números enteros, para seguir con el máximo como un divisor y el mínimo como un múltiplo.

Se establecen después los números racionales, que surgen de forma natural como cocientes de números enteros, y en ellos se estudian sus operaciones básicas, así como la expresión decimal de un número racional. Vamos a pasar al segundo tema, los números reales. Los números racionales, junto con los números irracionales, forman los números reales.

De la importancia de estos números ya se dieron cuenta los griegos seis siglos antes de Cristo. El origen del concepto de número irracional se encuentra siempre en la intuición geométrica y en la necesidad de la misma geometría. Pitágoras fue el primero en señalarlo de forma parecida a la siguiente.

Si se tiene un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen longitud uno, la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz de dos, y este no es un número racional. Tan notable descubrimiento bien merecía el sacrificio de Cienbueyes, con que fue celebrado por Pitágoras. Los matemáticos griegos posteriores estudiaron además de estos números irracionales sencillos, otros cada vez más complicados.

En general se puede decir que los griegos se limitaron esencialmente a trabajar con los irracionales, que se obtienen por aplicación repetida de la extracción de raíces cuadradas, y que por ello se podrían construir con la regla y el compás, pero nunca llegaron a tener la idea general de número irracional. Esta hizo su aparición al final del siglo XVI, como consecuencia de la introducción de los números decimales, cuyo uso se generalizó ya antes con motivo de la formación de la tabla de logaritmos. Cuando se transforma un quebrado ordinario en número decimal, pueden obtenerse, aparte de números decimales limitados, otros ilimitados, que son necesariamente periódicos.

Ahora bien, nada hay que impida considerar un número decimal aperiódico, esto es, un número decimal cuyas cifras se suceden sin obedecer a ley alguna determinada y sin parar. Cualquiera lo consideraría como un número determinado, aunque naturalmente no racional. Con esto se tiene ya el concepto de número irracional, espontánea creación, en cierto modo, del proceso aritmético que lleva consigo la fracción decimal.

Históricamente acontece así, que el cálculo obligó a que se introdujeran los nuevos conceptos, y sin que se pensase gran cosa sobre su esencia y fundamento, se operaba con ellos, afirmando su existencia, sobre todo al reconocer repetidamente su extraordinaria utilidad. Sólo al llegar al año 60 del siglo XIX, se vio la necesidad de formular aritméticamente de manera precisa los fundamentos de los números irracionales. Weierstrass fue el primero que abrió camino en estas investigaciones a través de las lecciones que explicaba en la Universidad de Berlín.

En el año 1872, Cantor, fundador de la teoría de conjuntos, dio en la Universidad de Hall una

teoría general de dichos números. De forma simultánea, pero independiente, hizo otro tanto en la Universidad de Brútwig. Este tema se inicia con la introducción de los números reales y sus propiedades.

A continuación se estudian las desigualdades y el concepto de valor absoluto que servirán para introducir el concepto de intervalo. Después se analizarán las potencias de los números reales y finalmente se estudiarán las ecuaciones e inequaciones en una variable, y las ecuaciones de segundo grado. También se establecerá una introducción a los logaritmos, que se estudiarán de forma más rigurosa en el tema 27.

En el tercer tema se introduce la teoría de conjuntos. En casi todas las áreas de las matemáticas contemporáneas subyace el concepto de conjunto. Este concepto proporciona una estructura base para hacer una formulación precisa de las distintas partes de las matemáticas.

La teoría de conjuntos fue creada por Cantor. Desde 1872 hasta finales del siglo XIX, la noción del conjunto era intuitiva. Esta utilización de los conjuntos sin la ayuda de reglas precisas llegó rápidamente a la aparición de paradojas.

Estas paradojas no eran nuevas. Ya en el siglo IV a.C. un personaje, Eubúlides, que siempre miente, declara que está diciendo una mentira. ¿Es esta frase la expresión de verdad? Cualquiera que sea la respuesta se llega a una contradicción.

Una paradoja parecida aparece en el Quijote de Cervantes. La primera paradoja estrictamente matemática aparecida fue dada por Cantor, pero Berrusel es el autor de la más famosa. Supongamos que se distingue entre conjuntos normales y anormales.

Por normales se entiende aquellos conjuntos que no son elementos en sí mismos. Por ejemplo, el conjunto de los árboles es un campo en un conjunto normal, pues tal conjunto no es ningún árbol. Los conjuntos anormales son aquellos que se contienen a sí mismos.

El conjunto de los conjuntos es anormal, pues a su vez es un conjunto. Brusel se preguntó por la naturaleza del conjunto de todos los conjuntos normales. ¿Era normal o anormal? Si era normal no se contenía a sí mismo, con lo que formaba parte del conjunto de los conjuntos normales, y por lo tanto era anormal, pues se contenía a sí mismo.

Contradicción, si era anormal se contenía a sí mismo, con lo cual formaba parte del conjunto de los conjuntos normales y era por tanto normal. Contradicción de nuevo, esta ingeniosísima paradoja mantuvo en vilo a los matemáticos durante varios años y motivó la axiomatización de la teoría de conjuntos. La primera axiomatización de la teoría de conjuntos se debe a Zermelo en 1908, fue mejorada por Frankel en 1922, y con ella las paradojas antes mencionadas desaparecen, ya que uno de los axiomas dice, ningún conjunto es elemento de sí mismo.

En este tema se presentan algunas herramientas básicas de las matemáticas que se van a utilizar a lo largo de todo el libro. El tema se inicia estudiando primero los conjuntos y subconjuntos, después sus operaciones y el producto cartesiano de dos conjuntos, y se termina

introduciendo el conjunto de aplicación entre conjuntos y los distintos tipos de aplicaciones que se pueden dar entre ellos. Estos tres primeros temas son básicos para el estudio del resto del programa, por lo tanto siempre les recomendamos que no pasen a los siguientes hasta haber comprendido perfectamente los conceptos y definiciones que se introducen en ellos.

Pasamos ahora al tema cuarto, que nos da unos conceptos básicos de la combinatoria. En dicho tema se presentan algunas de las técnicas básicas para contar elementos de conjuntos diversos de objetos. Estas técnicas están relacionadas principalmente con problemas del cálculo de probabilidades, pero no exclusivamente.

En los tipos de problemas que se intentan resolver con estos métodos será necesario contar cuántos elementos poseen los conjuntos implicados. En los casos elementales esto será fácil de realizar, pero existen conjuntos finitos para los que el cálculo de números de elementos no es trivial. Hay muchas situaciones donde un determinado tipo de tarea se puede realizar de diferentes maneras e interesa en estos casos poseer una estimación previa sobre el número de formas de llevar a cabo dicha tarea, es decir, interesa saber cuántas soluciones son posibles.

Una forma de encontrar respuesta a dicho tipo de preguntas es de las que trata este tema. Primero el principio de adición y multiplicación. Dichos principios están motivados por problemas como los siguientes.

Consideramos el experimento de lanzar una moneda al aire tres veces. ¿De cuántas maneras se puede obtener una, dos o tres caras? En el lanzamiento de dos dados, ¿de cuántas maneras se puede obtener que la suma de ambos resulta de 7 u 8? ¿Cuántos números naturales distintos existen comprendidos estrictamente entre 5000 y 10000 y que tengan todas sus cifras diferentes? En la resolución de problemas de este tipo casi siempre está implicado el siguiente principio fundamental. Escuchen atentamente.

Cuando un problema se puede dividir en k partes separadas y la primera parte admite n_1 soluciones, la segunda n_2 soluciones, la k -ésima n_k soluciones, el número total de soluciones para dicho problema es n_1 por n_2 por n_k . Hablemos ahora de las variaciones, permutaciones y combinaciones. Cuando se estudian las distintas colecciones que se pueden formar según una ley dada con elementos de un conjunto finito, es necesario establecer los conceptos de variación, permutación y combinación, así como las fórmulas para calcular sus valores. Vamos a poner algunos ejemplos.

A. En un carillón formado por n campanas, éstas se tocan siguiendo una sucesión. 1, 2, 3, n , que se permutan o cambian sucesivamente. Si hay sólo 6 campanas, se podrían tocar de 720 formas.

Son permutaciones de 6 elementos que corresponden a diferentes permutaciones del tono. Los compositores trabajan sobre aquellas permutaciones del tono que tienen interés musical y en las que aparecen de forma regular series armónicas. Otro ejemplo.

¿Cuántas palabras diferentes de 6 letras distintas pueden formarse con los elementos del conjunto A que incluyen A, B, C, D, E? ¿Cuántas contiene la letra B? Otro tipo de problemas. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 7 personas en una fila de 7 sillas? En la resolución de problemas de este tipo siempre se encuentran involucradas las fórmulas de número de permutaciones, variaciones o combinaciones. Pasamos al tema 5. El tema 5 nos habla del concepto de probabilidad.

En este tema se introducen los conceptos de probabilidad de sucesos, espacio muestral asociado definición y propiedades de la función probabilidad, así como el concepto de probabilidad condicionada. Bajo la base de observaciones y experimentos, la ciencia llega a leyes que gobiernan el curso de los fenómenos bajo estudio. El esquema más elemental y extendido para estudiar regularidades es.

En cada realización de un conjunto complejo de condiciones ocurre un acontecimiento determinado, por ejemplo. Si el agua a la presión atmosférica se calienta por encima de 100 grados centígrados, que es un conjunto de condiciones, se transforma en vapor, que es un acontecimiento determinado. O en cualquier reacción, sin intercambio con el entorno conjunto de condiciones, la cantidad de sustancia, de materia, permanece sin cambio.

Esta afirmación es la ley de conservación de la materia. Un acontecimiento que inevitablemente ocurre para cada realización del conjunto de condiciones se dice que es seguro. Si un acontecimiento definido no puede ocurrir teniendo en cuenta el conjunto de condiciones, entonces se dice que es imposible.

Y si cuando el conjunto de condiciones se realiza, un acontecimiento puede o no puede ocurrir, se le llama aleatorio. De estas definiciones se deduce que cuando se habla de cierta imposibilidad o aleatoriedad de algún acontecimiento se refiere siempre a cierto conjunto de condiciones. El que un sistema o un acontecimiento sea aleatorio tiene, a nivel del conocimiento de un sistema, un interés relativo, puesto que el conjunto de condiciones dadas no se refleja en las razones necesarias y suficientes para que ocurra dicho acontecimiento.

Sin embargo, hay una gran cantidad de fenómenos en los cuales, dada una realización repetida del conjunto de condiciones, el porcentaje de los casos en donde ocurre el acontecimiento determinado se desvía ocasionalmente de forma sustancial de algún valor promedio indicador de una operación a gran escala, múltiples repeticiones del conjunto de condiciones relativas al acontecimiento. Para un tal fenómeno uno puede obtener no sólo información sobre el estado en que es aleatorio el acontecimiento fijado, sino también una estimación cuantitativa de la posibilidad de que ocurra. Esta estimación es expresada por una proposición del tipo Si la probabilidad de que un acontecimiento prefijado ocurra cuando se realiza en el conjunto de condiciones es un número determinado p , la idea básica asociada a esta proposición es que la probabilidad de un acontecimiento bajo condiciones conocidas admite una evaluación cuantitativa por medio de algún número.

Esta idea se elaboró primeramente de forma sistemática en los trabajos de Fermat 1601-1665,

Pascal 1623-1662 y en particular por Bernoulli de 1654-1705. Sus investigaciones dieron lugar a la construcción de los fundamentos de la teoría de la probabilidad. Con el tiempo la teoría de probabilidades se ha desarrollado hasta convertirse en una parte de las matemáticas enriquecida con nuevos e importantes resultados que se han ido aplicando al estudio de fenómenos de la naturaleza más diversa.

Vamos a resumir, la teoría de probabilidades trata de formular en el lenguaje matemático y resolver los problemas que surgen a la hora de predecir valores de los parámetros o variables que describen experimentos sobre fenómenos de carácter aleatorio que no son determinados. Esto es así porque a pesar de su carácter imprevisible a nivel individual, cuando el experimento se realiza muchas veces se puede llegar a establecer leyes de comportamiento y por lo tanto predecir o calcular valores para las variables que intervienen. Por ejemplo, no sabemos lo que saldrá al lanzar un dado una vez, pero sabemos que si lo lanzamos 120.000 veces cada número saldrá aproximadamente 20.000 veces.

El tema 6 nos habla de la estadística descriptiva. La estadística es una parte de la matemática aplicada y tiene como función ordenar, analizar y decidir sobre la estructura matemática asociada a masas de datos numéricos obtenidos de la observación de fenómenos, bien sean físicos, económicos, psicológicos o sociológicos. La tarea de describir y procesar de modo ordenado la masa de datos numéricos provenientes de observaciones y experimentos constituye el objeto de la estadística descriptiva, que es la rama de la estadística de la que se va a tratar en este tema.

La estadística descriptiva trata de determinar ciertos parámetros estadísticos, parámetros que nos dan información sobre los rasgos de un elemento tipo del colectivo o de la población estudiado, así como ciertos parámetros que miden la desviación respecto de este elemento tipo. Entre los pioneros del estudio estadístico de poblaciones se encuentra Gaon, que estudió en el siglo XVII los estadillos de mortalidad en Londres. Galton y Pearson en el siglo XIX realizaron importantes contribuciones a la estadística teórica, basándose en investigaciones biológicas que fueron seguidas por los resultados de Gosset, que era discípulo de Pearson, sobre muestras pequeñas de poblaciones.

Este desarrollo se ha continuado en este siglo de forma impresionante, sobre todo a partir de la utilización de las computadoras. Hemos visto en nuestro programa esta noche los seis primeros temas de Matemáticas Especiales, todos ellos preparados por el profesor Emilio Bujalance. El programa de la asignatura cuenta con 30 temas, que paso a enumerar a partir del tema 7. Todos ellos los estudiaremos en siguientes emisiones.

Pues bien, el tema 7 nos habla de los sistemas de ecuaciones lineales. En él veremos las ecuaciones lineales, los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas equivalentes, la resolución de sistemas y también las matrices asociadas a un sistema. Continuaremos con el tema 8, que nos habla de matrices y determinantes.

Aquí veremos las matrices y las operaciones con matrices, lo que son los determinantes y los

cálculos de determinantes mediante su desarrollo por los elementos de una línea. El tema 9 nos habla de resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices. Con las reglas de Kramer, el rango de una matriz, el teorema de Raouchet-Frobenius y los sistemas homogéneos.

El tema 10, elementos de geometría, puntos y rectas, medida de longitudes de segmentos y ángulos, el teorema de Pitágoras. En el tema 11 entraremos en la trigonometría, razones trigonométricas de ángulos agudos, relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo, algunos cálculos sencillos de razones trigonométricas, también fórmulas para el seno y el coseno de la suma y diferencia de ángulos. En el tema 12, introducción a la geometría analítica, coordenadas, razones trigonométricas de ángulos cualquiera.

Tema 13, vectores del plano, definiciones, operaciones con vectores, producto escalar y combinación lineal de vectores. El tema 14, los números complejos, definiciones, números complejos en forma binómica, operaciones con números complejos en forma binómica y forma trigonométrica de un número complejo. En el tema 15 entraremos en los vectores del espacio, definiciones, lo que es un producto vectorial, otras propiedades del producto vectorial y la estructura del espacio vectorial.

El tema 16, geometría analítica del plano, veremos los puntos del plano, rectas en el plano, ecuaciones de una recta en el plano, posiciones relativas de dos rectas en el plano. El tema 17, la geometría analítica del espacio, puntos, rectas y planos en el espacio, ecuaciones de un plano en el espacio, posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio. El tema 18 nos habla de sucesiones.

¿Cuál es el concepto de sucesión? Operaciones con sucesiones, clases de sucesiones, límites de una sucesión y el número E. El tema 19, los cálculos de límites de sucesiones y el tema 20, funciones. ¿Cuál es el concepto de función, la gráfica de una función y cuáles son sus operaciones? En el tema 21 entraremos en los polinomios. ¿Cuál es el concepto de polinomio y cuáles operaciones se puede hacer con ellos? También, ¿qué son las funciones racionales? En el tema 22, límites de funciones.

El 23, funciones continuas. Y el 24, funciones derivables. El tema 25, estudio y representación de funciones.

Los cinco últimos temas. El tema 26 nos habla de funciones trigonométricas. El 27, de funciones logarítmicas y exponenciales.

El 28, primitivas de una función. El 29, cálculo de primitivas. Y el 30, la integral definida.

¿Cómo podemos sacar el máximo rendimiento en el estudio de matemáticas especiales? Para estudiar matemáticas debe utilizarse constantemente un cuaderno donde se vayan tomando anotaciones de lo que se va leyendo y, en general, de todas las ideas que van surgiendo durante el estudio. Una o muchas lecturas de los textos sin detenerse a expresar por escrito las

ideas principales es, en gran medida, un trabajo perdido. Para estudiar las definiciones y enunciados de proposiciones el método apropiado puede ser leer despacio cada una de las palabras y símbolos de la definición o enunciado intentando comprender su significado.

Realizar después una lectura completa de la definición o enunciado tratando de entenderlos en su conjunto. Analizar los rasgos esenciales del contenido de las lecturas anteriores. Es conveniente también buscar ejemplos particulares de aplicación de cada nuevo concepto antes de pasar a los siguientes.

En matemáticas especiales es imprescindible realizar los ejercicios de los libros que maneje el alumno. Una vez acabado el tema es importante repasarlo en profundidad reteniendo sobre todo los puntos fundamentales del mismo. Hay que poner especial énfasis en la práctica de la asignatura y, desde este punto de vista, el alumno únicamente debe poseer los conocimientos teóricos necesarios para resolver con éxito los ejercicios o problemas.

Por supuesto, sería ideal que comprendiese todos los argumentos teóricos del texto base pero hay que insistir que en la prueba final sólo hay problemas prácticos. Y ahora sí, despedimos nuestro tiempo. El curso de acceso se acaba.

Nos veremos mañana. Muchas gracias y muy buenas noches. La UNED les ha ofrecido dos horas y media de radio educativa y cultural.

Mañana nos pueden sintonizar de nuevo, si así lo desean a través de la Onda de la ionosfera en el 1359 de Onda Media y en Radio 3, frecuencia modulada de Radio Nacional de España. Nuestro primer espacio será Psicología Hoy. Continuaremos con Revista de Educación.

Después, Matrícula Abierta y, por último, el curso de acceso. Gracias por acompañarnos. Que pasen una feliz noche.

Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org