

... Asignatura a Matemáticas Básicas. Título, El Número Natural. Guión 19. Autor, Carmen Herrera. Fecha de emisión, 13 del 2 de 1980. Con la emisión radiofónica de hoy, comenzamos una serie de programas dedicados al estudio de los diferentes tipos de números. Empezaremos introduciendo la idea de número natural y a partir de ella definiremos el número entero y el número racional.

daremos una idea general de lo que son los números reales y los números complejos. Creo que todos sabemos que los números naturales son aquellos que utilizamos diariamente para contar, es decir, el 0, el 1, el 2, etc. Pero no tenemos muy claro cuál es el concepto matemático de número natural. Efectivamente, todos saben cuáles son los números naturales y saben manejarlos. Nosotros, en esta emisión, trataremos de explicar el concepto de número natural, estudiando los procesos lógicos por medio de los cuales se pueden construir estos números. Yo pienso que lo importante de los números es saber manejarlos, que es lo que se necesita en la vida diaria. La construcción lógica de los diferentes tipos de números puede aportar mucho a la formación matemática del alumno, suponiendo además una estupenda aplicación a la teoría de conjuntos que estudiamos en la primera parte del curso. Por estas razones, dedicamos un especial interés a la investigación de los números naturales.

a la construcción matemática de los números, así como a otras cuestiones que pueden desarrollar la capacidad lógica de nuestros alumnos. Vamos a comenzar la introducción del número natural definiendo el cardinal de un conjunto. Llamaremos cardinal de un conjunto al número natural de un conjunto. El número de elementos que este conjunto posee. Por ejemplo, el cardinal del conjunto formado por las letras vocales es 5, ya que este conjunto tiene 5 elementos. ¿Puede usted decirme cuál es el cardinal del conjunto formado por los meses del año? Sí, el cardinal de este conjunto es 12, pues 12 es el número de meses que tiene el año.

De acuerdo. ¿Y el cardinal del conjunto vacío? ¿Cuál será? Como el conjunto vacío no tiene ningún elemento, supongo que su cardinal será cero. Efectivamente. El cardinal del conjunto vacío es cero. De igual forma, el cardinal de un conjunto unitario es uno. Y así sucesivamente. Entonces, para hallar el cardinal de un conjunto, lo único que tenemos que hacer es contar el número de elementos que tiene, ¿no es así? Sí, así es. Pero debemos tener en cuenta que únicamente vamos a considerar conjuntos finitos, es decir, conjuntos que tengan un número finito de elementos. Seguidamente, vamos a dar una nueva definición. Diremos que dos conjuntos son equipotentes cuando tienen el mismo número de elementos, es decir, cuando tienen el mismo cardinal. Por ejemplo, son dos conjuntos equipotentes.

los formados por las letras vocales de nuestro alfabeto y por los dedos de una mano, pues ambos conjuntos tienen cinco elementos, tienen el mismo cardinal. Pongan ustedes ahora otro ejemplo de conjuntos equipotentes. Sí, el conjunto formado por las letras que forman la palabra sol es equipotente con el conjunto formado por los números uno, dos y tres, ya que los dos conjuntos tienen tres elementos. De acuerdo. Quiero señalar también que podemos definir la equipotencia de conjuntos diciendo que dos conjuntos son equipotentes o que son coordinables cuando se puede establecer una aplicación biyectiva entre ambos conjuntos. Es evidente que las dos definiciones de equipotencia de conjuntos que hemos dado son equivalentes, pues basta recordar que entre dos conjuntos, hay dos conjuntos finitos únicamente.

se puede establecer una aplicación biyectiva cuando los dos conjuntos tienen el mismo número de elementos, es decir, cuando tienen el mismo cardinal. Seguidamente vamos a comprobar que la relación de equipotencia de conjuntos es una relación de equivalencia. ¿Qué propiedades tendrá que cumplir para ser una relación de equivalencia, señorita? Deberá cumplir las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Muy bien. Comprueben ustedes que verifica las tres propiedades. Vamos a ver. La equipotencia de conjuntos es reflexiva porque todo conjunto es un conjunto de elementos.

es equipotente consigo mismo, ya que todo conjunto tiene el mismo cardinal que sí mismo. La equipotencia de conjuntos es simétrica porque si un conjunto tiene el mismo cardinal que otro, el segundo conjunto tendrá el mismo cardinal que el primero. Y es transitiva porque si tenemos tres conjuntos y se cumple que el primero tiene el mismo cardinal que el segundo y el segundo conjunto tiene el mismo cardinal que el tercero, resulta que el primer conjunto tiene el mismo cardinal que el tercero. Bien, como ustedes recordarán, toda relación de equivalencia produce una clasificación. Así, la equipotencia de conjuntos los clasifica según el cardinal que tienen. Es decir, una clase de equivalencia estará formada por todos los conjuntos que tienen el mismo número de elementos y cada una de estas clases de equivalencia es un número natural. ¿Y esto último? Perdón, perdóneme, pero...

pero yo no lo he entendido muy bien. ¿Puede aclararlo un poco más? Naturalmente. Vamos a ver. Definimos un número natural como una clase de equivalencia formada por todos los conjuntos que tienen el mismo cardinal. Así, a la clase formada por todos los conjuntos que tienen cero elementos, la llamamos número natural cero. A la clase formada por todos los conjuntos unitarios, la llamamos número natural uno. A la formada por todos los conjuntos que tienen dos elementos, la denominamos número natural dos, y así sucesivamente. Entonces, el conjunto de los números naturales es el conjunto de las clases de equivalencia, ¿no es cierto? Efectivamente, es cierto. El conjunto de los números naturales es el conjunto de las clases de equivalencia, es decir, el conjunto cociente producido por la relación de equipotencia o coordinabilidad.

Señoritas, si ha quedado suficientemente claro el concepto de número natural, vamos a hacer un breve repaso del proceso seguido para afianzar más las ideas. ¿Recuerdan de dónde partíamos? Sí, empezamos definiendo lo que era el cardinal de un conjunto. Lo definíamos como el número de elementos que contiene dicho conjunto. Después definíamos la equipotencia de dos conjuntos. Decíamos que dos conjuntos son equipotentes cuando tienen el mismo número de elementos, o sea, cuando tienen el mismo cardinal. Seguidamente comprobábamos que la equipotencia de conjuntos verificaba las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto, era una relación de...

Vamos a ver, ¿de qué otra manera definíamos la equipotencia de dos conjuntos? La equipotencia de conjuntos también la definíamos de otra manera, que era equivalente a la anterior. Decíamos que dos conjuntos son equipotentes o coordinables cuando entre ambos conjuntos se puede establecer una aplicación biyectiva. De acuerdo. ¿Pueden seguir exponiendo el concepto de número natural? Sí. Una vez que habíamos visto que la equipotencia de conjuntos era una relación de equivalencia, analizábamos cuáles eran las clases de equivalencia que nos había producido dicha relación. Veíamos que cada clase de equivalencia estaba formada por todos los conjuntos que tienen el mismo número de elementos, o sea, por todos los conjuntos que tienen el mismo cardinal. Y cada una de estas clases de equivalencia era un número natural. El conjunto de todas estas clases de equivalencia es un número natural.

es decir, el conjunto cociente formado por la relación de equipotencia, es el conjunto de los números naturales. Muy bien, muy bien. Entonces el conjunto de los números naturales está formado por el 0, el 1, el 2, el 3, etc., etc. Es un conjunto de infinitos elementos y cada elemento es una clase de equivalencia formada por todos los conjuntos que tienen el mismo cardinal. ¡Gracias!

El próximo día introduciremos el número entero.