

AC 15 49

Buenas noches, bienvenidos al tiempo del curso de acceso directo a la universidad para mayores de 25 años, el CAT. Todas las asignaturas del curso de acceso tienen su presencia en nuestro espacio, con la colaboración de todos los departamentos que lo componen y la realización del centro de diseño y producción de medios audiovisuales. Matemáticas Especiales ocupará nuestro tiempo esta noche.

Nos acompaña el profesor Antonio Costa para ver la primera unidad didáctica. Como ya saben, la asignatura de Matemáticas Especiales cuenta con un libro base y un libro de problemas. El texto consta de 24 temas que se distribuyen atendiendo a su contenido en seis unidades didácticas.

Creemos conveniente que el alumno dedique, por término medio, un mes de trabajo a cada una de ellas. Un tema por semana, aproximadamente. En relación con este punto, debemos hacer notar que para comprobar los conocimientos adquiridos después del estudio de un tema, no hay nada mejor que resolver ejercicios sobre el mismo.

En esta primera unidad didáctica veremos cuatro temas. El primer tema, que nos habla de conjuntos y relaciones. El segundo tema, aplicaciones y leyes de composición.

El tercero, introducción a la combinatoria. Y el cuarto, de probabilidad. Y damos ya la bienvenida al profesor Antonio Costa, con el que veremos la primera unidad didáctica.

Vamos esta noche a comentar con el profesor Antonio Costa la primera unidad didáctica de Matemáticas Especiales. Intentaremos solventar las dudas y las dificultades que en estos cuatro temas se pueden presentar. Buenas noches.

Buenas noches. Vamos a empezar con el tema de conjuntos. ¿Qué podemos decir? Pues en el tema de conjuntos hay varias cosas importantes.

En primer lugar, saber lo que es un conjunto y saber qué quiere decir que un elemento pertenezca a un conjunto. Después también es necesario conocer las operaciones fundamentales entre conjuntos, es decir, la unión y la intersección. Y más que nada, lo que nos interesa es que ustedes tengan, sean capaces de manejar estas dos operaciones.

Quizá los alumnos puedan encontrar una dificultad porque alumnos que hacen mucho que no estudian matemáticas los conjuntos ni los hayan visto. Sí, efectivamente. Además, es aquella parte de la matemática que hace unos años se llamaba la matemática moderna y que en cierto modo pues daba un poco de miedo porque era como una terminología nueva, algo que estaba empezando, ¿no? En realidad los conjuntos ya llevan mucho tiempo en las matemáticas, sin embargo, nunca habían pasado a la enseñanza elemental.

Bueno, pero lo que se les va a exigir es únicamente un lenguaje. Entonces, un conjunto pues

todo el mundo sabe lo que es, es una colección de objetos. ¿Y qué quiere decir que un elemento pertenezca al conjunto? Pues es simplemente decir que ese objeto está dentro del conjunto, nada más.

Y en cuanto a la unión e intersección, perdona Antonio. Sí, pues la unión es exactamente lo mismo. Si uno toma dos colecciones y las une, pues en realidad ahora tiene todos los elementos que pertenecían a cada una de las dos colecciones y en cuanto a la intersección, pues es quedarse con aquellos elementos que son comunes, aquellos objetos que son comunes.

Simplemente esto. ¿Los símbolos les pueden ofrecer alguna dificultad? Sí, pero realmente es lo mismo, es realmente aprender tres, cuatro símbolos. Es decir, saber que una U es el símbolo de la unión, saber que una especie de ϵ es el símbolo para decir que un elemento pertenece a un conjunto y que una $\cap$ puesta al revés o una N , pues es el símbolo de la intersección.

Y en cuanto a los conjuntos finitos y los conjuntos infinitos, ¿qué es un conjunto finito y qué es un conjunto infinito? Pues en realidad un conjunto finito es aquel que se puede contar el número de elementos que se tiene y que se le puede asignar un número de los que nosotros conocemos. Este conjunto tiene cinco elementos, esta colección tiene 354 cromos. Un conjunto infinito es aquel que tiene ya tantos elementos que no se le puede asignar un número.

En realidad, pues nosotros, los ejemplos que vamos a manejar van a ser conjuntos finitos y conjuntos infinitos. Pero en este primer tema, en este primer capítulo o esta primera lección, nos basta con que tengan claro todos estos conceptos dentro de los conjuntos finitos. Hay que saber las definiciones y también estas propiedades.

Bueno, sí, realmente conocer unas propiedades que si uno se pone unos ejemplos en conjuntos finitos son muy naturales. Y además es lo que recomendamos, que cada vez que vean una propiedad se pongan unos ejemplos del tipo del primer conjunto son los números 1, 2, 3, 4, 5. El segundo conjunto son los números 1, 2 y haga entonces uniones, intersecciones, combine todo tipo de operaciones y va viendo que hay ciertas reglas que son muy naturales. Es decir, que cuando se tiene ya la definición, cuando ya se sabe, se coge lápiz y papel y ya practica.

Y adelante, exactamente. Y después no se preocupen por cuestiones, algo que a lo largo de todo el curso es importante, no se preocupen por las cuestiones de demostraciones, las cuestiones formales. Lo que es importante es que sepan hacer ejercicios, que sepan manejar realmente los conjuntos, que sepan si a uno le ponen un ejercicio, le ponen un reto, pues que sepa lo que tiene que hacer.

En este primer tema nos encontramos también la relación de equivalencia, su definición y sus propiedades. Muy bien, pues para explicar lo que es una relación de equivalencia, quizá lo mejor sea explicar con un ejemplo muy sencillo. Una relación de equivalencia es, por ejemplo, tener la misma altura.

Entonces dos personas tienen la misma altura, entonces se dice que son equivalentes. Así pues, ¿qué propiedades son las fundamentales de estas relaciones o de las relaciones de equivalencia? Pues en primer lugar es la propiedad reflexiva, que quiere decir que uno tiene la misma altura que uno mismo. Después está la propiedad simétrica, que dice que si uno tiene la misma altura que un amigo suyo, ese amigo suyo también tiene la misma altura que uno mismo.

Y por fin es la propiedad transitiva, que dice que si uno tiene la misma altura que otra persona y a su vez esa otra persona tiene la misma altura que una tercera, pues la tercera persona tiene la misma altura que uno mismo. Bueno, esto pues parece un juego de palabras, un trabalenguas y cosas bastante elementales e incluso triviales, pero bueno, después ya irán viendo conforme vaya avanzando el curso cómo estas relaciones de equivalencia se van complicando y en ocasiones es un poco más difícil observar esa relación de equivalencia. Las relaciones de equivalencia son muy importantes en matemáticas, pues sirven para realmente detectar, clasificar objetos, determinar ciertas propiedades que una vez se demuestran para un objeto, pues luego son válidas para todos los objetos equivalentes.

¿No tiene entonces problemas en principio? Sí, puede tener, pero es raro que realmente busquemos ejercicios en esta parte, pero sí podía ocurrir que, bueno, pues tuviéramos una pequeña relación de equivalencia definida siempre sobre un conjunto finito, una relación, y bueno, probar que esa relación es de equivalencia. Podría ser una cuestión. ¿Y en cuanto a la relación de orden? Pues es muy parecida, pero en este caso tiene una propiedad que no cumple, o que cumple otra propiedad totalmente diferente, que es la propiedad antisimétrica.

Entonces, el ejemplo clásico, pues como el que hemos puesto anteriormente, sería tener más altura que, así pues yo tengo más altura que mí mismo, bueno, se puede decir, ¿no? Aunque tengo la misma altura, pero vamos a decir que tenemos la misma altura o igual altura. ¿La antisimétrica sería, por tanto, lo contrario de la simétrica? Pues sería, en este caso, si yo tengo más altura o igual altura que un amigo mío, y ese amigo mío tiene más altura o igual altura que yo, pues entonces es que tenemos la misma altura. Eso sería la propiedad antisimétrica.

Podemos pasar al tema 2. Muy bien. El tema 2 nos habla de aplicaciones y correspondencias. ¿Qué es una aplicación y qué es una correspondencia? Bueno, pues una aplicación es como poner en relación dos conjuntos.

Así que, por ejemplo, podemos poner por una parte los cromos de una colección y por otra parte el álbum. Entonces, la aplicación puede ser simplemente ir pegando los cromos dentro del álbum. Bueno, pues esto es lo que tienen que saber.

Tienen que saber que una aplicación lo que hace es corresponder a cada elemento de un conjunto otro elemento de otro. Y entonces, que está bien definida, es decir, que hace corresponder a cada elemento un único elemento del conjunto final. ¿Todas las correspondencias son aplicaciones? No siempre.

Entonces, ahí está la diferencia y por eso es por lo que tienen que saber qué quiere decir exactamente aplicación y cuál es su diferencia con correspondencia. ¿Qué propiedades tienen que cumplir? Bueno, pues una aplicación tiene que cumplir que cada elemento tiene una única imagen. Después, lo que es interesante que sepan es distinguir varios tipos de aplicaciones.

Hay aplicaciones que se llaman inyectivas y aplicaciones que se llaman superinyectivas. Entonces, también nos interesa que sepan estos dos conceptos. ¿También se pueden hacer prácticas en este sentido? Muy pocas, muy pocas.

En realidad solamente prácticas entre conjuntos finitos que se definen de una forma muy simple las aplicaciones o las correspondencias y también verificar si una cierta correspondencia es una aplicación o bien si una aplicación es sobreinyectiva o es inyectiva. Por lo tanto, ¿no va a ofrecer demasiadas dificultades este tema? No, no creo. En cualquier caso, sí que quiero decir que en el texto base, tanto en una lección como en la otra, pues aparecen ciertos conceptos, sobre todo al final de las lecciones, en los cuales yo diría que es mejor que no se metan.

Es decir, pues cuestiones de máximos, de ínfimos, en el caso de la primera lección, pues que son bastante delicados y todavía no tienen ejemplos suficientes para poder entender esa sutileza. Y lo mismo ocurre en el caso de la lección 2 con las leyes de composición. Bueno, pues las leyes de composición después, más adelante, van a ver lo que es una operación dentro de un conjunto.

Entonces, es una cosa que es quizá prematura intentarla estudiar en un nivel de abstracción tan grande. Entonces, es mejor que sigan y luego vuelvan a esto. Bien, sí.

En el caso de los máximos y de los mínimos y los extremos inferiores y extremos superiores, más vale que lo dejen. En el caso de las leyes de composición, pues después van a llegar a la estructura de grupo, de anillo, de cuerpo, donde van a ver realmente leyes de composición funcionando. Entonces, pues pueden volver atrás y ver realmente qué se decía en ese momento.

Y el tema 3, el tema 3 que nos habla de combinatorio. Bueno, este es un tema mucho más práctico. La combinatoria es la forma de contar.

Es decir, es una técnica que se ha manejado durante mucho tiempo las matemáticas y entonces esta sí que da pie a muchos ejercicios y ya a ejercicios un poquito más complicados. ¿Nos podrías poner algún ejemplo de ejercicio, alguno sencillo? Bueno, pues el ejercicio más sencillo de todos puede ser el calcular cuántas quinielas se pueden hacer, cuál es el número máximo de quinielas diferentes todas. Entonces, bueno, pues eso en principio una persona puede empezar a hacer cálculos, ya se va dando cuenta de que son muchas, pero realmente tiene que pensar un poco con un matemático para ser capaz de dar con el número exacto.

Y eso ya verá que es un ejercicio para una persona del curso de acceso que es trivial. ¿Y qué es una variación? Pues una variación es la forma de hacer grupos de un número determinado de

elementos donde influye el orden. Es decir, nos dan un conjunto de, vamos a poner, 20 cifras y nos piden calcular todos los números que se pueden calcular con 5 cifras.

Y además donde no haya repetición de cifras en tales números. Pues eso es una variación. En el caso de que pueda haber repetición entre los números que estemos considerando, pues se dice que son variaciones con repetición.

Entonces hay unas fórmulas para calcular cuántas variaciones hay y cuántas variaciones con repetición. Entonces lo que nos interesa también es que conozcan muy bien esas fórmulas. En el libro aparecen también demostradas estas fórmulas.

Aparece el por qué son estas fórmulas y no otras. Es interesante que lean esas demostraciones y que se convenzan por qué tienen esa forma. Sin embargo no se le va a exigir en el examen ni es nuestro objetivo el que memoricen una demostración.

Entonces en cuanto a las variaciones lo que tendrían que saber es la definición. Es la definición y luego saber muy bien aplicarlo. Es decir que si a uno le exigen un problema como el que he dicho antes, haya todo el número posible de quinielas, pues que sepa hacerse las preguntas mentales necesarias para saber que lo que le está exigiendo exactamente es calcular el número de variaciones.

¿Y una permutación qué es? Pues es una cosa parecida. En este caso tenemos un conjunto y lo que tenemos es que en ese conjunto queremos ver cuántos órdenes hay posibles. Es decir, por ejemplo si tenemos una mesa alargada de comensales y tenemos el número exacto de comensales que se pueden sentar en cada una de las sillas y queremos ver de cuántos modos posibles se pueden sentar.

Pues eso serían las permutaciones de tales comensales. Entonces ese número, también hay una fórmula muy fácil de calcular que es el número de permutaciones. Este tema, por tanto, ¿cuál es su mayor dificultad? Más que nada es el saber interpretar en los ejercicios qué tipo de estructura, qué tipo de variaciones, qué tipo de permutaciones, qué tipo de combinaciones y qué fórmula exactamente hay que usar.

Es decir, que yo diría que el problema aquí está en entender muy bien qué es cada cosa. ¿Y en cuanto a las combinaciones? Pues es parecido a las dos variaciones, pero en este caso los grupos que queremos formar de objetos, en ellos no influye el orden. Entonces, como hemos visto, hay tres tipos de grupos o de estructuras dentro de la combinatoria.

Por un lado están las variaciones, las permutaciones y las combinaciones. Y después dentro de las combinaciones también puede haber repetición o no dentro de esos grupos. Entonces, ¿qué es lo que tiene que saber un alumno en este tema? Pues si le pone un ejercicio se tiene que hacer varias preguntas.

En primer lugar, ¿cuántos elementos nos dan? Después, ¿cuántos entran en cada grupo? Seguramente nos piden distribuir esos elementos en los grupos. Entonces, ¿cuántos entran en

cada grupo? Después, ¿en cada grupo influye o no el orden? Y en tercer lugar, ¿hay o no repetición? Entonces, con esas tres preguntas, si uno las consigue hacer al enunciado del ejercicio, sabrá si se trata de combinaciones, combinaciones con repetición, permutaciones, variaciones o variaciones con repetición. Y en cada uno de esos casos sabe que tiene que aplicar una fórmula.

Y eso le va a dar el número exacto que hay que saber. Después, lo que sí quería decir es que en el texto se introducen estos conceptos de una forma un poco más abstracta. Se define, por ejemplo, el concepto de permutación como el número de billeciones que se pueden hacer entre un mismo conjunto.

Realmente estamos diciendo lo mismo. Sin embargo, esta forma de decir el número de billeciones es la forma más matemática. Entonces, una vez sabe el concepto para él, o sea, que tiene claro que lo que quiere decir una permutación es el número de órdenes, lo que tiene que hacer después es interpretarlo matemáticamente y ver cuál es la definición del texto.

Quizá entonces lo que más dificultad puede tener el alumno es en entender el enunciado. Efectivamente. Vamos, yo creo que en este tema es la clave.

Y bueno, por supuesto, tener un poquitín de memoria para saberse las fórmulas. Aunque uno, bueno, en cualquier caso podría deducirlas a partir de la demostración que ha estudiado, pero no es muy recomendable perder el tiempo del examen deduciendo una fórmula que uno puede tener en la memoria. Sí, lo importante entonces es saber si es una combinación, si es una permutación, si es una combinación y luego ya aprenderse las fórmulas.

Exactamente. Aplicar la fórmula y rápidamente ya se tiene un número que nos va a decir el resultado pedido. ¿Este tema es muy importante para los que van a venir después? Sobre todo para el tema de probabilidad.

Del que vamos a hablar ahora. Pues sí, vamos a hablar del tema 4, el de probabilidad. ¿Qué es la probabilidad? Pues todo el mundo ha tenido algún contacto con este tema, yo creo.

Cuando habla de deportes y se habla de la probabilidad que tiene un equipo de ganar a otro. O bien cuando uno habla de juegos de azar y quiere saber la probabilidad que tiene de ganar cuando echa una moneda en una máquina a tragar perras. Aparece en muchos lugares.

Y en realidad el concepto todo el mundo lo tiene de una forma informal o intuitiva. En realidad nosotros, como somos matemáticos, queremos ver cuál es el concepto matemático. Tiene que saberlo, aunque nosotros solamente nos vamos a manejar con unos sucesos o unos experimentos que son sencillos.

Que además son los que más aparecen en la vida cotidiana. Y son aquellos que vienen dados por experimentos que conllevan un número finito, una cantidad finita o un conjunto finito de posibilidades. Por ejemplo, lanzar una moneda al aire y ver si puede salir cara o puede salir cruz.

Entonces, ¿qué ocurre? Que normalmente hay unos casos posibles y hay unos casos que se pueden decir que son favorables, que son buenos, que son aquellos que deseamos. En este caso de lanzar una moneda al aire, pues hay dos casos posibles, o cara o cruz. Y casos favorables, pues si uno ha elegido que salga cara, pues hay un único caso favorable.

Entonces la probabilidad en estos sucesos así tan sencillos, pues se puede definir diciendo que es el número de casos favorables partido por el número de casos posibles. En este caso, un medio. Es decir, que era bastante lógico que nos diera este resultado.

Y prácticamente todos ustedes en su casa, pues lo habrían adivinado o lo sabían ya perfectamente. Bueno, pero entonces ¿qué ocurre? Que hay otras ocasiones en las que es más difícil. Entonces, ¿es más difícil por qué? Porque es más difícil contar ese número de casos posibles y ese número de casos favorables.

Pero precisamente lo que hemos aprendido en la lección anterior es a contar. Entonces, bueno, pues sabiendo contar y sabiendo esta regla, pues en principio se pueden hacer ya muchos problemas de probabilidad. ¿Hay probabilidades negativas? Pongo un ejemplo.

No, no. La probabilidad es un número que está siempre comprendida entre 0 y 1. Entonces da muy mala impresión, sobre todo cuando uno lee un ejercicio de un alumno, pues que dice, bueno, pues la probabilidad de esto es menos 48. Uno, bueno, pues realmente no ha entendido muy bien cuál es el tema.

Bueno, también se podrían poner en tanto por ciento, pero bueno, en ese caso es como si estuviéramos dividiendo por 100. Pero ¿se puede, por ejemplo, decir cuál es la probabilidad de que no salga el 3 cuando tira un dado? Sí, por supuesto. Eso nosotros, en vez de decir probabilidad negativa, lo que decimos que es la probabilidad del suceso contrario.

Entonces, hay una serie de leyes, después que sabiendo, por ejemplo, cuál es la probabilidad de que salga el 3, pues podemos saber cuál es la probabilidad de que no salga el 3. Y también es bastante lógico que sea precisamente 1 menos la probabilidad del suceso. Es decir, la probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso. Este tema es eminentemente práctico.

Y además muy importante. Como todo el mundo también se puede dar cuenta, pues es un tema que está en la calle, que uno se va a encontrar muchas veces, que va a tener que usar probablemente si hace una carrera. Por supuesto, si hace matemáticas, o si hace físicas, o incluso si hace ingeniería, o hace económicas, por supuesto.

Entonces, tiene que saberlo, tiene que manejarlo, y tiene por lo menos que saber estos conceptos. Bueno, después también en el texto aparecen unas nociones de medida, de álgebras universales. No se metan mucho en esos temas, simplemente sepan esta noción de probabilidad, sepan cuáles son esas propiedades fundamentales, qué ocurre con la probabilidad de la unión, qué ocurre con la probabilidad de la intersección, cuando los sucesos

son independientes, qué ocurre, se puede decir que la probabilidad de que ocurran dos sucesos independientes, pues es el producto de las probabilidades, también lleguen hasta la fórmula de Bayes, que es una fórmula que habla de la probabilidad de sucesos condicionados.

Entonces, es un tema que quizá es un poco escabroso y difícil, pero bueno, es conveniente que lo sepan, y ya verán que las aplicaciones reales, los ejercicios sobre este tema son sencillos. Sin embargo, en este caso la fórmula de Bayes tiene una apariencia complicada. ¿Hay una serie de fórmulas, entonces, más importantes que otras? Sí, bueno, creo que las he dicho ya, que así son las fórmulas de Bayes, que quizá es la menos importante de todas las que he dicho, pero sí que es importante pues la fórmula que dice qué es la probabilidad, en segundo lugar la fórmula del suceso contrario, y también la fórmula que nos dice qué ocurre con la probabilidad de la unión y con la probabilidad de que ocurran dos sucesos independientes a la vez.

¿Lo que tiene que hacer el alumno aquí es aprenderse estas fórmulas? Aprender esas fórmulas y tener sobre todo leer muy bien los ejercicios de probabilidad, también es muy conveniente que los mediten un poco antes de ponerse a aplicar una fórmula, porque hay veces en que se confunden simplemente por falta de interpretación. Y luego hacer muchos problemas. Y hacer muchos ejercicios, efectivamente.

Hemos repasado estos cuatro temas de la primera unidad didáctica, pero yo quisiera saber qué es lo más importante, en qué debe hacer hincapié el alumno, todo puede ser importante, y cómo deben estudiarlos. Muy bien. Yo diría que entonces el tema de conjuntos es un tema puramente de lenguaje.

Entonces, bueno, que sepan los conceptos muy claramente y después que tengan una idea de cómo se hacen ejercicios muy sencillos. Lo mismo digo en el tema de aplicaciones, que sepan muy bien lo que es una aplicación, lo que es una aplicación proyectiva, una aplicación inyectiva. Y después lo mismo, que sepan hacer ejercicios muy sencillos también.

En cuanto a combinatoria, yo diría que lo que tienen que saber también muy bien es lo que es combinaciones, permutaciones, variaciones, y en cada caso saberse bien la fórmula. Y después resolver muchos ejercicios. Esto sí que es un tema práctico y tienen que saberlo hacer muy bien.

Y probabilidad, quizá, pues es el tema donde yo pondría más hincapié dentro de los cuatro y donde tienen que hacer más ejercicios todavía. En esta primera unidad didáctica, ¿qué es lo que nos va a servir de mayor apoyo para las siguientes? Yo diría que las dos primeras lecciones, las de conjuntos y aplicaciones. Las lecciones 3 y 4 son lecciones que, de cierto modo, están juntas y acaban en ese tema.

Y ya desde el principio tienen que estar con el libro de texto y con el libro de problemas, que eso es muy importante. Por supuesto, sí. Es bueno que tengan el libro de problemas.

Y yo también les recomendaría, pues si tienen acceso a algún texto de BUP o de COU, pues que

también lo consulten porque realmente son textos muy didácticos y muy bien hechos en muchas ocasiones y les puede servir de mucha ayuda. Casi todos de ellos tienen estos temas también tratados de una forma muy parecida o igual porque realmente los temas no los hemos inventado, son temas que están ahí. Quizá entonces sería conveniente que empezaran, para esta primera unidad, repasando textos de BUP, por ejemplo, para luego meterse ya más de lleno en el texto de matemáticas especiales.

Sí, sí. Bueno, incluso estoy seguro que si lo ven con un texto de BUP, casi les sería suficiente. Pues muchas gracias, Antonio Costa, y hasta el próximo programa.

Adiós, Isabel. Gracias. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org Con el curso de acceso termina la programación de la UNED en el día de hoy.

Mañana volveremos a nuestra hora habitual, 8.30 de la noche, 7.30 en la Comunidad Canaria, con Psicología Hoy. Continuaremos con Revista de Educación. Matrícula abierta será nuestro siguiente espacio, y para acabar, el curso de acceso.

Gracias por su atención. Buenas noches y feliz descanso.