

AC 10 88

Hola, de nuevo con vosotros en el tiempo que la UNED dedica al curso de acceso directo para mayores de 25 años, el CAT. En nuestro programa de esta noche, dos asignaturas ocupan nuestro tiempo, comenzaremos con matemáticas básicas. Hoy las lecciones 6 y 7, conjuntos y funciones, nos comentará estos temas el profesor Víctor Hernández Morales.

En la segunda parte del programa, introducción a la economía, con la profesora Esther Méndez y nuestro invitado José María Abad-Buit, que nos hablarán del tratado de Maastricht, como continuación a un anterior programa. Ya comenzamos con matemáticas básicas. Esta noche en matemáticas básicas veremos los capítulos 6 y 7. Nos acompaña para ello el profesor Víctor Hernández, buenas noches Víctor.

Buenas noches. Bien, en la matemática, buena parte de los problemas que se plantean no pueden ser resueltos en términos estrictamente numéricos, por ello se ha incorporado al pensamiento matemático muchos conceptos más allá de los números. En este capítulo y en el siguiente se examinan algunos de ellos, los conjuntos, sus operaciones, sus relaciones y sus transformaciones.

Pero bien, Víctor, ¿a qué se denomina conjunto? Desde un punto de vista intuitivo, conjunto es cualquier colección de objetos. Presentado de esta manera, la idea de conjunto se nos presenta como quizás la idea más abstracta y más general que puede usar la matemática, puesto que si meditamos bien, prácticamente dentro de esta noción de conjunto, como colección de objetos de cualquier clase, pues podemos incluir innumerables entidades que manejamos y que relacionamos a menudo. Pueden ser tanto entidades concretas como una colección de libros, una biblioteca sería un conjunto, o puede ser una colección de ideas.

Un conjunto de ideas, un conjunto de teorías entran también dentro de esta definición. Desde el punto de vista matemático, la propiedad fundamental, diríamos la relación fundamental que gozan los conjuntos es la de pertenencia. Para definir los conjuntos hemos hablado de los objetos que lo componen.

Y la manera matemática de hablar de esto es decir que un objeto pertenece o no a un conjunto dado. Esa es la relación primaria. Ya desde un punto de vista más teórico, el objeto es algo que no se define y la relación de pertenencia es algo dado, que sirve para definir conjuntos.

¿Y cómo se simbolizan? Bueno, en la forma normal de escribir, pues acostumbramos a simbolizar los conjuntos por letras mayúsculas, los objetos por letras minúsculas y la relación de pertenencia pues por un simbolito que es una especie de mayúscula curvada. Pero bueno, en fin, no tiene más importancia. Sería exactamente igual nombrar los conjuntos de otra manera, pero en fin, es un poco la costumbre y no está mal saberlo.

¿Y qué es la inclusión de conjuntos? Bueno, desde el momento en que concebimos los conjuntos como colecciones de objetos y sabemos reconocer la relación, la pertenencia, es

decir, somos capaces de distinguir si un elemento dado está o no en un conjunto, si pertenece o no a él, automáticamente descubrimos nuevas relaciones. La inclusión es una relación que descubrimos entre conjuntos. Nosotros podemos imaginar dos colecciones de cosas y entonces, comparándolas, podemos saber si todos los elementos de una están contenidos en la otra, pertenecen a la otra o no.

En el primer caso, decimos que la colección que está contenida en la otra está incluida en ella y también decimos que es un subconjunto o que es una parte. Hay una enormidad de sinónimos para este tipo de relaciones primitivas. ¿Y qué son los conjuntos universal y vacío? Bueno, imaginamos, el conjunto vacío proviene de aceptar la existencia de algo, de una colección que carece de objetos.

Esto puede parecer así a primera vista un convencionalismo un poco artificioso, pero pronto caemos en la cuenta de que es muy útil porque hay una gran cantidad de relaciones que manejamos que implican la utilización de ese conjunto sin objetos. Simplemente, si nosotros planteamos una condición imposible de cumplir por los objetos, pues automáticamente esa condición la podemos entender como que define un conjunto que no contiene ningún elemento, puesto que no hay ningún objeto que cumpla la condición. Además, digamos, en el desarrollo posterior de la teoría resulta muy útil en cuanto, digamos, a cerrar bien las operaciones y a permitir establecer, por ejemplo, la relación que existe entre dos conjuntos que no tienen ningún elemento en común.

Si nosotros pensamos en una colección de mesas y en una colección de sillas, ninguna mesa es silla o ninguna silla es mesa. Por consiguiente, no hay ningún objeto en común. Y, sin embargo, el mero hecho de preguntarnos ¿tendrán algún objeto en común? parece que nos induce a estar pensando en la colección de objetos que simultáneamente están en ambos.

Bueno, pues en este caso, referidos a esta pareja de conjuntos mesas y sillas, la respuesta sería es el conjunto vacío. El conjunto de los elementos que están simultáneamente en ambos no tiene ningún elemento. ¿Y el conjunto universal? Y el conjunto universal procede más, eso sí, procede más de un convencionalismo que, para determinados razonamientos, interesa, en ese momento, considerar que todos los conjuntos que se analizan están incluidos en uno mayor.

Y a ese mayor que, digamos, para ese razonamiento concreto los contiene a todos, le llamamos universal. Bien, los conjuntos pueden ser combinados mediante operaciones semejantes a las de los números. ¿Qué nos podrías decir de estas operaciones? Sí, bueno, realmente ya hemos visto, digamos, la primera relación que encontramos entre los conjuntos, que hablamos hace un momento, Isabel, y que era la inclusión.

La inclusión, además, aunque sea, otra vez volver sobre ello, recuerda mucho a la ordenación de números. En cierto modo, la inclusión nos sirve, nos puede servir para ordenar de más chico a más grande los conjuntos. Pero además de esto, podemos operarlos, operarlos, como bien has dicho, en ese sentido, en el mismo sentido en que operamos números.

Cuando sumamos números, a partir de dos números dados, obtenemos otro número. Cuando multiplicamos números ocurre algo por el estilo. Pues bien, hay operaciones en este sentido, que acabo de mencionar, con los conjuntos.

Una de ellas la llamamos unión y procede simplemente de reunir los elementos que tienen dos conjuntos. Nosotros podemos imaginar, pues, que se yo, el conjunto formado por las personas de una familia y el conjunto formado por las personas de otra familia. La unión de esos dos conjuntos es aquel que procedería de reunir a todas esas personas.

Puede darse el caso que alguna persona, digamos, esté emparentada con ambas familias, esté en ambos conjuntos. En ese caso, naturalmente, en la reunión esa persona estaría contada una vez. Esto lo podemos imaginar bien, si imaginamos a una familia reunida en el salón de su casa.

Otro día se reúne la otra familia también en el salón de su casa y un tercer día se reúnen ambas familias. Pues las personas que estén en ese salón, donde se han reunido estas dos familias, forman la unión de esos dos conjuntos de personas. Bien, hemos hablado de la unión y, por ejemplo, la intersección o la complementación.

La intersección la mencioné antes, sin decirlo, y es la operación que, a partir de dos conjuntos, nos devuelve otro, que es aquel formado por los elementos comunes a ambos, los elementos que simultáneamente están en los dos. Y la complementación siempre es referida a un universal. Aquí vuelve a aparecer el universal.

Es decir, nosotros estamos considerando conjuntos incluidos en uno mayor, en ese universo que hemos fijado, y el complemento de un conjunto dado es simplemente la colección, el conjunto de los elementos que no están en el nuestro, que no pertenecen al nuestro. Es decir, según yo he podido entender, por ejemplo, la intersección en el ejemplo que habías puesto antes en cuanto a las familias, ¿la intersección serían esos elementos comunes a las dos familias? Claro, serían las personas que pertenecen a ambas familias. Bien, y los conjuntos suelen representarse por medio de unos dibujos denominados diagramas de Venn, en honor al lógico John Venn.

¿Cómo son estos diagramas? Bueno, la idea de esta representación es bien simple y, por consiguiente, muy universal. Consiste simplemente en, digamos, acotar un trozo del plano, un trozo del papel, por ejemplo, mediante un cuadro. Y de esa forma representamos, digamos, todo lo que entra en el cuadro lo consideramos elementos de nuestro universo, del universo que estemos considerando en ese momento.

Y luego los conjuntos, como digamos agregados de objetos, pues los representamos por un área cerrada. Todos los objetos que estén dentro de esa área cerrada entendemos que pertenecen al conjunto y los que estén fuera de esa área no pertenecen al conjunto. Estas áreas, pues, qué sé yo, por comodidad pues se suelen dibujar circulares o con formas más o menos ovoidales o elipsoidales.

Pero bueno, la forma es completamente intrascendente. Lo importante es que una vez trazada esa línea cerrada, esa línea separa el plano en dos regiones, la exterior, la que reconocemos como exterior, y la que reconocemos como interior. Lo que se encuentre en su interior, los objetos que dibujemos o representemos en su interior, entenderemos que pertenecen al conjunto que representa esa línea cerrada.

Y los objetos que se encuentren fuera entenderemos que no pertenecen a él. Es decir, lo que se encuentra fuera de esa línea cerrada es el complemento del conjunto que hemos representado. Para acabar este capítulo, podríamos hablar del cardinal de un conjunto.

¿Qué es el cardinal de un conjunto? Pues es una cosa bien sencilla, he dicho con una palabra técnica. El cardinal de un conjunto no es nada más que el número de elementos que tiene el conjunto. Bien, y para recapitular un poco en cuanto al capítulo 6, ¿tienes algo más que añadir? Sí, bueno, sobre el cardinal, que lo dejamos un poquito... vamos, dijimos tan solo lo que era.

Quiero hacer notar que en esta lección estudiamos también las relaciones del cardinal de distintos conjuntos frente a las operaciones conjuntistas, a la unión y a la intersección, fundamentalmente. Por ejemplo, pues llamo la atención sobre una idea bien simple y por demás errónea, que es pensar que el cardinal de la unión de dos conjuntos es la suma de los cardinales. En general, para cualquier par de conjuntos, esto no es así.

Basta el mismo ejemplo que hemos citado anteriormente de las dos familias. Si esas dos familias tienen alguna persona en común, alguna persona pertenece a las dos, cuando se reúnan, el número de personas que encontraremos reunidas será inferior a la suma de los miembros de una familia más los miembros de otra familia. La relación general que guarda el cardinal de la unión con los cardinales de los conjuntos necesita una tercera condición adicional, para poder ser planteada siempre, que es conocer el cardinal de la intersección.

Digamos la expresión general, pues se diría así, el cardinal de la unión es la suma del cardinal del primer conjunto más el cardinal del segundo conjunto menos el cardinal de la intersección. Y el motivo de por qué esto es así es bien simple. Si yo cuento las personas, los objetos que pertenecen al primer conjunto, estoy contando ahí, una vez, los que pertenecen a ambos.

Y si le sumo el número de elementos, el cardinal del segundo conjunto, de nuevo estoy contando los que ya conté la primera vez, los que pertenecen a ambos. Porque, en siguiente, esos elementos que pertenecen a ambos conjuntos, los que pertenecen a la intersección, deben ser descontados una vez. De ahí, repito, la relación cardinal de la unión igual a cardinal de A más cardinal de B menos cardinal de la intersección.

Y también quiero llamar la atención, en fin, aquí no podemos extendernos, pero quiero llamar la atención sobre ciertas cuestiones que vienen planteadas en el libro acerca, digamos, de la interpretación, de la traducción de los diagramas de Ben en términos de fórmulas simbólicas o recíprocamente, como unas relaciones entre conjuntos expresadas mediante símbolos se

puede representar de manera gráfica. Insisto, quiero llamar la atención sobre esto porque es un tipo de ejercicio, creo que bastante formativo, para este nivel de matemáticas. Muy bien, pues vamos a continuar ahora con el capítulo 7. En matemáticas hay un concepto que significa transformación o cambio y a este concepto se le denomina aplicación.

También se le denomina función. Víctor, ¿qué es una aplicación? Sí, si quieres todavía me gustaría, antes de entrar, digamos, en el concepto tan matemático de aplicación, meditar un poquito sobre la idea de transformación. Tal y como hemos presentado este concepto, pues hemos eludido la manera más frecuente y muy algebraica, quizás demasiado abstracta para nuestros alumnos, de introducir la noción de aplicación.

Y he preferido, simplemente, pues tratar de razonar acerca de cuál debe ser la manera de describir lo que normalmente entendemos como una transformación. ¿Una transformación de qué? Pues una transformación, diríamos, de un estado inicial en un estado final. Un estado inicial que reconozco compuesto de distintos objetos.

Por ejemplo, me gusta mucho el ejemplo que viene, además del libro de Shannon sobre cibernética, el ejemplo de qué hace la luz del sol cuando actúa sobre una esponja húmeda y sobre una placa fotográfica. ¿Qué quiere decir esta pregunta? Quiere decir que yo estoy tratando de definir la transformación producida por el sol, el efecto de los rayos solares. Y para definir eso, digamos, pruebo a ver qué hace el sol en una serie de objetos.

A eso lo llamo mi estado inicial. Es un conjunto de objetos. El sol transforma esos objetos y los convierte en un estado final, en otro conjunto de objetos.

Pero no me basta, simplemente, con conocer lo que había antes, la esponja húmeda y la placa fotográfica virgen, y lo que habrá después, la esponja seca y la placa fotográfica velada. No me basta, digo, conocer solamente eso para precisar el efecto de los rayos solares sobre los objetos que había al principio, sino que además tengo que indicar con precisión en cuál, cada uno de los primeros, en cuál de los segundos se ha transformado. Es decir, tengo que indicar el efecto, la transformación producida por los rayos solares es convertir la esponja húmeda en esponja seca y la placa fotográfica virgen en placa fotográfica velada.

Y en resumen, con esto que estoy diciendo, pues que para poner en evidencia esa idea dinámica de transformación, necesito, primero, precisar cómo actúa, sobre qué objetos actúa la transformación. Y segundo, añadir en qué convierte cada uno de los objetos iniciales. Esto desde el punto de vista matemático se resume así.

Vamos a llamar aplicación a algo que cambia los elementos de un conjunto, que denominaremos inicial, en elementos de otro conjunto, que denominaremos final. Y, además, incluimos una descripción que indica en cuál, en qué objeto final se convierte cada uno de los iniciales. Lo que supone que cada uno de los iniciales tiene un transformado en el segundo conjunto y solamente un transformado.

Es decir, la restricción que hacemos es no permitir, digamos, la ambigüedad en las transformaciones. Nos has dado una explicación sobre el concepto de aplicación. Primero, de transformación, que además supongo que en la transformación no solamente es en matemáticas, sino también en otra rama de saber, como biología.

Además, creo que hay ejemplos en el libro de textos sobre ello. Sí, hemos procurado ilustrarlo para ayudar a comprender que esta noción, que puede parecer un poco extraña, pues realmente no es nada más que una extracción de una infinidad de transformaciones que consideran todas las ciencias. Con esta salvedad, vuelvo a insistir, digamos, de ser una transformación unívoca.

Podemos pensar transformaciones que no son, también las estudia la matemática, pero no se incluyen bajo el concepto de aplicación, transformaciones en las cuales un objeto puede convertirse en varias cosas. Bien, y este es el concepto de aplicación, pero ¿cómo se puede definir una aplicación mediante fórmulas? Bueno, ahí, digamos, la manera más inmediata de definir la aplicación, pues a partir de lo que dije, pues sería hacer una lista. Una lista que consistiría en el conjunto inicial y, a continuación del conjunto inicial, podríamos escribir su transformado, en que se transforma el primer elemento del conjunto inicial, en que se transforma el segundo, etcétera.

Puede darse el caso, por ejemplo, que dos elementos del conjunto inicial se transformen en la misma cosa. Pues esto no tiene tampoco nada de raro. La transformación quemar convierte la mesa y convierte y puede convertir el libro en la misma cosa, en un montón de cenizas, de carbón.

De manera que hasta ahí lo permitimos, porque la transformación es unívoca. Pero ya, cuando el conjunto inicial contiene muchos elementos, o incluso podemos considerar que contiene infinitos elementos, por ejemplo, si el conjunto inicial es un conjunto de números, los números naturales, los números enteros, la transformación exige, pues normalmente, un pequeño esfuerzo de precisión. A lo mejor hacer esa lista, pues se nos hace inacabable o no permite precisar absolutamente el transformado de un número del conjunto inicial que no nos dé tiempo a escribir.

De manera que, quizá la mejor solución, pues sea plantear lo que podríamos llamar una fórmula, definir la transformación mediante una fórmula. Esto tampoco es una cosa rara. Por ejemplo, yo pienso en la transformación que convierta a los números naturales en su doble.

Pues, si quisiera escribir la lista de estas transformaciones, no acabaría nunca. Tendría que escribir el 1 se transforma en el 2, el 2 en el 4, el 3 en el 6, el 4 en el 8, así, así, así, y no acabaría nunca. Bien, es verdad que cuando haya escrito cinco o seis transformados de estos, la misma lista parece sugerir de qué estamos hablando.

Pero, sin embargo, desde un punto de vista un poco purista, estrictamente hablando, si yo termino de escribir mi lista en el 10 y digo el 10 se transforma en el 20, nada tiene que hacerme

sospechar que el 11 se transforme en el 22. Y esta carencia se puede suplir muy fácilmente, porque no me cuesta nada decir, estoy hablando de la transformación que consiste en multiplicar, multiplicar cada número natural por 2. Eso sería una definición verbal de la transformación. Y si lo quiero hacer un poco más simbólico, pues diría la transformación que convierte un número natural cualquiera, x , por ejemplo, en su doble, $2x$.

La transformación que a cada x le convierte en $2x$. Esa ya es una pequeña formulita, una definición simbólica de esa simple aplicación, convertir cada número natural en su doble. ¿Y a qué llamamos imagen e imagen inversa? Bien, este es un concepto que viene de antes.

Yo estoy hablando de transformado, por seguir un poco en la línea de la raíz que hemos buscado del concepto, pero realmente, digamos en los términos matemáticos, cada elemento se convierte en otro que se llama imagen del primero. Es un poco también pues a la manera del espejo. Cuando nos miramos en el espejo vemos ahí nuestra imagen, que no somos nosotros, es nuestro transformado detrás del espejo.

¿Y qué podrías decirnos de las funciones? Bueno, las funciones no son más que aplicaciones, unas aplicaciones particulares. La matemática, como todas las ciencias, pues tiene su vocabulario que se ha creado en buena parte como consecuencia de la tradición. Entonces, cuando los conjuntos sobre los que actúa la aplicación son conjuntos numéricos, lo habitual, lo tradicional, es llamar a esas aplicaciones funciones, y no son otra cosa, Isabel.

Bien, y la composición de aplicaciones, esto parece algo más complicado. Bueno, tampoco es tan complicado, la composición de aplicaciones es la operación natural con aplicaciones. A mí me gusta llamarlo la transformación sucesiva.

Si volvemos a la idea de aplicación como algo que convierte un objeto en otro, pues no nos cuesta nada imaginar dos transformaciones que actúan simultáneamente. Es decir, la primera transformación coge los objetos de una clase y los convierte en objetos de una segunda clase, y sobre este producto de la acción de la primera aplicación actúa a su vez otra aplicación. Por ejemplo, quizás sea más claro por centrarnos, pero bueno, la mayor parte de los procesos industriales, pues en cierto modo los podemos considerar composición de transformaciones.

Una transformación industrial, por ejemplo, es la molienda. Moler algo puede actuar sobre los granos de trigo, sobre los granos de cebada, sobre las piedras, sobre muchos objetos distintos, y produce un transformado. Y otra acción es, por ejemplo, amasar, de manera que cuando la operación, la transformación amasar, actúa sobre el trigo, pues lo mezcla con agua y lo amasa.

Cuando actúa sobre el cemento, lo que hace es el cemento para una obra. De manera que estamos de nuevo ante otra transformación que actúa sobre objetos distintos y los convierte en otras cosas. Y ahora podemos imaginar una cadena de estas transformaciones, concretamente, pues imaginando la fabricación del pan, la podemos imaginar como una serie de transformaciones de operaciones sucesivas donde varias transformaciones se encadenan y convierten un objeto inicial en otro final, digamos, alejado.

Por ejemplo, pues la primera transformación que podríamos imaginar para fabricar el pan, consistiría en moler, moler los granos de trigo. Sobre el producto, sobre el resultado de esta transformación, que es la harina, vendría otra operación que sería amasar. Y sobre el resultado de esta actuaría, por ejemplo, otra que sería cocer.

Y el resultado final sería el pan. Y vemos así el paso del trigo, del grano de trigo al pan ya cocido, como el producto, en esta noción simple que estoy planteando, como el producto de tres transformaciones que sucesivamente actúan una sobre lo que la anterior dejó. Pues muy bien, ya no hay tiempo para más.

Nos veremos en el próximo programa, hablando de los capítulos 8 y 9. Buenas noches, Víctor. Buenas noches.