

AC 15 51

Hola, buenas noches, bienvenidos un día más al curso de acceso a la universidad para mayores de 25 años. Antes de pasar a hablar de nuestros contenidos de hoy, quisiera hacerles una serie de recomendaciones. Recordarles que para cualquier consulta o información sobre la radio, la programación o para exponer sus preferencias o peticiones, hemos habilitado un teléfono al que pueden llamar las 24 horas del día, es el 398-6084 de Madrid, repito, 398-6084, no olvide marcar el prefijo 91 si llama desde fuera de Madrid.

Si prefiere ponerse en contacto con nosotros por correo, debe enviar sus cartas a la siguiente dirección, Programa Curso de Acceso, Centro de Medios Audiovisuales, Ciudad Universitaria sin Número, Distrito Postal 28040 de Madrid. Indicarles asimismo que las emisiones de la UNED se envían a los centros asociados para que puedan consultarlas. También los alumnos que puedan desplazarse pueden acudir a la Biblioteca Mediateca de la UNED, cita de la calle Senda del Rey sin Número de Madrid, en horario ininterrumpido de 9 de la mañana a 8 de la tarde y donde dispondrán de material de audio y de vídeo.

En las fonotecas de los centros asociados se encuentran las emisiones de la radio de cursos pasados en cintas de caseta y que están a su disposición. En la guía de medios hay un amplio catálogo con los diferentes temas que se han venido tratando a lo largo de estos últimos años, en cada asignatura, muchos de ellos pueden ser de utilidad porque amplían y complementan las emisiones de este curso. Sigán este consejo y hagan uso de todos los materiales que la UNED pone a su disposición, que seguro les será muy útil.

Otro de los medios de comunicación e información con los que cuenta el alumno es el llamado Boletín Interno de Coordinación Informativa, el BICI. En este boletín que aparece semanalmente se encuentra todo tipo de información académica, así como avisos y comunicaciones de los profesores. Recuerden que el BICI está a su disposición en el centro asociado.

Y ahora sí entramos en materia. Esta noche en Matemáticas Especiales nos acompaña el profesor Antonio Costa con el que veremos y revisaremos la unidad didáctica 3. Esta noche en Matemáticas Especiales nos acompaña el profesor Antonio Costa. Buenas noches.

Buenas noches. Vamos a ver los espacios vectoriales, dependencia e independencia lineal, matrices y determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Y podemos empezar con los espacios vectoriales.

¿Qué es un espacio vectorial? Bueno, un espacio vectorial es un concepto muy abstracto, como se ve en la definición del libro, un concepto algebraico, pero que es una abstracción de algo geométrico. Entonces el alumno, antes de atacar la definición que viene en el texto, debe tener la idea de que un vector es como si fuera una flecha. Tiene un origen y un extremo.

Es como las flechas que lanzan los indios. Y entonces con estas flechas se pueden hacer

diversas operaciones, se pueden sumar, se pueden multiplicar por un número. Es una abstracción de ese concepto.

Después viene una definición formal que se aplica a otros muchos casos. Lo importante es que haya dos espacios vectoriales que maneje bien, que son el espacio vectorial de los vectores del plano y el espacio vectorial de los vectores del espacio. Es, por tanto, conceptos bastante abstractos.

Son bastante abstractos, pero siempre los debe enfocar el alumno de una forma muy concreta. Es decir, siempre manejarse en estos dos ejemplos, en el plano y en el espacio. Estamos hablando de espacios vectoriales, pero este tema también nos habla de subespacios vectoriales y de subespacios generados por un conjunto de vectores.

¿Qué es esto? En el caso del plano solamente hay una posibilidad de subespacio vectorial, que es una recta vectorial. Una recta es un concepto que tenemos todos. Y en el caso del espacio podemos hablar de un plano generado por dos vectores.

Estos son los conceptos de subespacio. También hay una definición formal y hay un concepto más general, pero nos conformamos con que tengan claro estos dos ejemplos. Y podemos pasar entonces al tema 2, dependencia e independencia lineal.

Aquí también habla de vectores. Como vemos, son temas que aunque hacen sincapié sobre conceptos algebraicos, en realidad su origen es geométrico. Tanto el primero como el segundo provienen de lo que se llama la geometría analítica.

La geometría analítica es algo que se inició con el hecho de que a un punto, que es algo físico, algo geométrico, que vemos, que más o menos tenemos conciencia de ello por el espacio donde estamos, se le asigna un número, o un par de números en el caso del plano, tres números en el caso del espacio, que es lo que se llaman las coordenadas. Eso dio lugar a la geometría analítica. Entonces, lo que se hace de esta forma es reducir problemas y estudios geométricos, que son difíciles, que en ocasiones matematizarlos cuesta trabajo, a problemas algebraicos.

Esto es lo que está detrás de estos temas. En el caso de la dependencia e independencia lineal, una vez que ya hemos conseguido abstraer los conceptos, por ejemplo, de punto, mediante el concepto de vector, vamos a ver qué quiere decir que dos vectores estén alineados, o que definan puntos que están en la misma recta, o bien que tres puntos están sobre el mismo plano. Estas concepciones de estar en la misma recta o en el mismo plano se consiguen mediante lo que se llama la dependencia e independencia lineal.

De nuevo aparece una formulación algebraica que, si no se sabe este sustrato geométrico, nos parece artificial y abstracta, pero realmente lo que está haciendo es esto. ¿Y el alumno puede ver con claridad la diferencia entre dependientes e independientes? Sí, debe saberlo bien. Tiene que tener muy claro lo que quiere decir que dos vectores son linealmente dependientes, que

dos vectores son linealmente independientes.

En el caso del plano, es simplemente que estén alineados o no lo estén. También, algebraicamente, quiere decir que verifiquen una relación donde hay unos números que pueden ser, en el caso de que se verifique la relación, tienen que ser obligatoriamente cero, o se dice que los vectores son linealmente independientes, o bien puede ser que esos parámetros puedan ser distintos de cero y verificarse en cualquier modo la relación. En ese caso dice que son linealmente dependientes.

Este tema nos habla también de espacios de dimensión finita. Bueno, pues realmente hay espacios de dimensión infinita, pero como son unos espacios que se salen del alcance del curso, pues más vale únicamente que tengan el concepto de lo que es la dimensión. La dimensión, en el caso del plano, es 2, en el caso del espacio es 3. En el caso de una recta, pues es 1 también.

¿Y el tema 3? El tema 3 nos habla de matrices y de determinante. ¿Podemos empezar a ver qué es una matriz sobre un cuerpo, por ejemplo? Bueno, pues una matriz es una tabla de números. Ya dijimos que en el concepto de cuerpo lo que importaba es que también provenía de la idea de número.

Un cuerpo era una estructura algebraica donde se podía sumar, restar, multiplicar y dividir. Era un número. Entonces una matriz es una tabla de elementos de un cuerpo, una tabla de números.

Quizá parece un poco fuera de sitio, dice uno. Bueno, pues estábamos estudiando cosas geométricas, ¿por qué de repente pasamos a las matrices? Bueno, la importancia de las matrices es para calcular determinantes, que es la siguiente palabra del título de la lección. Entonces lo que ocurre es que ese problema del que hablábamos antes, de la dependencia lineal, de saber si dos vectores estaban alineados, la forma que tienen los matemáticos de resolverla es coger esos dos vectores y dibujar un paralelogramo, dos de cuyos lados son esos vectores.

Entonces resulta que si esos vectores están alineados, el paralelogramo tiene área 0. Y si no lo están, pues tiene área mayor que 0. Entonces, ¿cuál es el cálculo del área de ese paralelogramo? Pues eso viene dado por la fórmula que da el determinante. Entonces lo que hay que hacer es, en primer lugar, poner esos vectores en coordenadas, lo que se hace es geometría analítica, se pasa de un concepto geométrico a un concepto o algo numérico, y después se aplica la fórmula del determinante. Entonces, según se pasa del concepto de un par de vectores a esas coordenadas, las coordenadas se escriben en una tabla.

Entonces de ahí viene el concepto o la idea de matriz, de escribir coordenadas en tablas, de escribir ristas de números, columnas de números en tablas. O sea, que una vez haya dado el determinante, se pasan a estas tablas que serían las matrices. No, digamos que una vez se tienen los vectores, se calculan las coordenadas, se ponen en forma de una tabla, y en esa tabla

se hacen ciertas operaciones algebraicas, y eso es el determinante.

El determinante es hacer unas operaciones algebraicas entre los elementos de la matriz, que es una tabla de números. Se ponen en forma de tabla porque luego es más sencillo recordar cuál es la fórmula del determinante, porque también nuestra idea geométrica del plano nos hace recordar mejor que tenemos que multiplicar los elementos que están en la diagonal, que simplemente si estuvieran puestos todos uno detrás de otro, pues es el primero y el tercero. Entonces es más sencillo verlos de forma geométrica e imaginarse y acordarse de esa regla.

Pero por supuesto, esto no es necesario ponerlos en esa tabla para hallar el determinante, pero bueno, es mucho más sencillo. Los determinantes tienen propiedades. Por supuesto, claro, y tienen que saberse.

Pero también quería abundar otra cosa sobre los determinantes, y es que en el texto viene la fórmula de un determinante en el caso general, una matriz n por n . Es una fórmula que no tienen que aprenderse. Está bien que la lean, que la sepan, pero lo que es importante es que sepan hacer determinantes de matrices 2×2 y 3×3 , o sea, tablas que tengan cuatro números o nueve números. Esto es lo que se les va a pedir.

Eso es lo primero que tienen que aprenderse. Quizá la forma de exponerlo más elegante es como viene en el texto, decir primero la fórmula general y después ir a casos particulares. Sin embargo, lo que realmente el alumno tiene que hacer es, primero, aprenderse los casos particulares, los casos más sencillos, los determinantes de matrices 2×2 y 3×3 , y después aprender estas operaciones y estas propiedades que decía Isabel.

Es decir, esto de permutar filas, de hacer la combinación lineal de una fila o de varias filas y restárselo a otra, que son operaciones que tienden a simplificar el determinante o la matriz de la cual se quiere hacer el determinante. También nos habla el tema del desarrollo de un determinante por los elementos de una línea. Efectivamente.

Esto es una forma de saber o de calcular el determinante general, un determinante de matrices $n \times n$. Entonces, sí, esto también lo tienen que hacer. Además, esta es la forma normal y habitual de hacer un determinante no utilizando la fórmula genérica.

¿Y en cuanto al rango de una matriz? También este es otro concepto y muy importante. El rango de una matriz nos da el número de vectores linealmente independientes cuyas coordenadas son las columnas de la matriz. Entonces, este concepto además después, como ve, ya está muy ligado al concepto de dependencia e independencia lineal, o sea que proviene ya de ahí.

Pero después tiene una aplicación que es la que viene en la lección siguiente, que es para estudiar y resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero, en principio, en este tema solamente tenemos que aprender esto, el concepto. El concepto y saberlo calcular.

Pero para saberlo calcular es necesario únicamente saber calcular determinantes y saber cómo,

a partir del cálculo de determinantes, se calcula el rango de una matriz. O sea, lo que tienen que saber es que para calcular el rango de una matriz tienen que coger el determinante más grande dentro de la matriz, que es distinto de cero. Y el orden de ese determinante es lo que le da el rango.

Podemos pasar al tema 4, aunque luego haremos un pequeño repaso de los 4 temas. El tema 4 nos habla de sistemas de ecuaciones lineales. ¿Te puedes empezar hablando de sistemas de ecuaciones lineales? El tema de sistemas de ecuaciones lineales es muy importante.

Es decir, un sistema de ecuaciones lineales quizá todo el mundo, aunque de una forma inconsciente, se ha encontrado alguna vez con un sistema de ecuaciones. Simplemente es que haya dos condiciones expresadas de forma numérica y que tienen que suceder al mismo tiempo. Recuerde, por ejemplo, esos problemas que antes aparecían en los libros de texto.

Decían que la edad de un padre es el doble de la del hijo, pero dentro de 20 años la edad del hijo será un tercio de la edad del padre, o algo parecido. Entonces, por esos problemas, simplemente había que llamar a la edad del padre X a la edad del hijo Y y plantar dos ecuaciones. Entonces, luego tendría que resolver ese sistema de ecuaciones y eso le daba una solución, que eran las edades requeridas.

Bueno, esto es un ejemplo poco práctico, pero ejemplos realmente útiles suceden. Es más, yo diría que esta es una de las cosas que cualquier persona que vaya a hacer una carrera de ciencias o una ingeniería o incluso económicas va a tener que resolver sistemas de ecuaciones. Entonces, este tema yo diría que es de capital importancia.

El tema 4, por lo tanto, hacer hincapié en que es muy importante. Y entonces, ¿qué es lo que es importante aquí? Saber resolver sistemas de ecuaciones. Realmente, si a uno le dan un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, pues que sepa, primero, que ese sistema puede tener solución, puede que no tenga solución, o puede que tenga una solución única o infinitas soluciones.

Eso es lo primero que tiene que hacer. Eso se llama discutir o estudiar el sistema. Para ello, lo que tiene que hacer es utilizar lo que se llama el teorema de Ruche-Frobenius.

Entonces, bueno, pues tiene que saber qué es lo que dice. Para ello, tiene que saber cuál es la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. Como se ve aquí, estamos haciendo relación al tema anterior.

O sea, que tiene que saber lo que son matrices. Y después, tiene que comparar los rangos de esas dos matrices. Si los rangos son iguales, pues se dice que el sistema es compatible.

Es decir, tiene solución. Si los rangos son distintos, pues el sistema es incompatible y no tiene solución. Puede ser que tenga infinitas soluciones o que tenga un número finito de soluciones.

Eso depende si ese rango, que es igual el de la matriz ampliada que el de la matriz de los

coeficientes, coincide con el número de incógnitas. Es importante aquí que el alumno, por supuesto, aparte de aprender todos estos tipos de conceptos, haga muchos problemas, resuelva muchas ecuaciones. Por supuesto.

Esto es como nadar. Se aprende practicando. No vale de nada leer todos los ejercicios que vienen resueltos en las unidades didácticas o en el libro de problemas.

Lo que tiene que hacer es escribirse el enunciado del sistema y después tratar de hacerlo. Eso, sin duda alguna. Además, es una técnica.

Ahora mismo hay ordenadores o casi calculadoras que ya resuelven todo tipo de sistemas de ecuaciones. Pero es conveniente que, igual que saber multiplicar, es importante el saberlo. Saber lo mismo que es lo que está haciendo esa máquina.

Y además, sobre todo, el saber interpretar. ¿Cuál es el resultado que nos va a dar? ¿Qué es lo que quiere decir? Habíamos un poco explicado lo que era la discusión o el estudio del sistema. Pero también es necesario el resolverlo.

El dar realmente cuáles son las soluciones. Para ello hay una cosa que se llama el método de Kramer. Para ello tienen que hacer una serie de determinantes.

Y entonces hacer unas divisiones. Al final se reduce a aplicar unas fórmulas. O bien, si pueden utilizar lo que se llama el sistema de Gauss.

Aquí, efectivamente, el tema 4 nos habla del método de Gauss, del teorema de Rouchet y de la regla de Kramer. ¿Todo esto lo tienen que aprender? Tienen que saberlo. Pero más que saberlo, pues, teóricamente, saberlo utilizar.

Estas son cuestiones todas muy prácticas. No se trata simplemente de conocerlas, sino de aplicarlas a casos concretos. Y yo les diría que tienen que hacerlo muchas veces.

Simplemente con aprender el concepto. El concepto no se puede aprender si no se aplica en este caso. Exactamente.

Son conceptos eminentemente prácticos. Y, además, yo les diría que son este tipo de ejercicios, de sistemas de ecuaciones, son muy socorridos también después para evaluar a un alumno. Ya que si, por ejemplo, aparece un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, y se le pide estudiar y resolver tal sistema, pues, no solamente tiene que saber la resolución del sistema, sino también tiene que saber lo que es una matriz, lo que es un determinante, lo que es el rango, y entonces se le evalúa sobre una gran cantidad de cosas y nos da una idea bastante buena de lo que es el aprovechamiento del alumno.

Por lo tanto, es un tema que se ha repetido muchas veces a lo largo de los años entre las pruebas después que tienen el examen. Entonces, yo le diría que cuide mucho este tema y que haga muchos ejercicios y que cuando llegue en junio sea una de las cosas que sepa hacer

perfectamente sistemas de ecuaciones. Efectivamente, este tema también nos habla de sistemas equivalentes y sistemas homogéneos.

Bien, sistemas equivalentes lo que quiere decir es que tengan las mismas soluciones. Y sistemas homogéneos son aquellos donde aquellos coeficientes que no multiplican ninguna variable son todos ceros. Estos tienen un tratamiento un poco diferente porque hay una solución especial que es la que todas las incógnitas sean iguales a cero, que siempre ocurre.

Entonces, realmente lo que interesa es que no sea esa la única solución posible. Entonces, es un poco un tratamiento especial, aunque los métodos son exactamente los mismos. Lo que pasa es que hay una nomenclatura especial.

Realmente no se dice que sea compatible en el caso de que tenga solamente la solución 000, porque realmente es la solución que no es interesante. Entonces, cambia esa terminología, pero es simplemente un cambio de terminología. Ya digo que la resolución es prácticamente lo mismo.

Hemos visto los cuatro temas, pero quería que nos dijeras un poco más de cada uno de ellos. Por lo menos, ¿qué es lo más importante? En el caso de espacios vectoriales, saber que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son espacios vectoriales y que los vectores se pueden sumar y multiplicar por un número. En el caso de dependencia e independencia lineal, lo que quiere decir que dos vectores en el plano sean linealmente dependientes, es decir, que sean alineados, y lo que quiere decir que tres vectores en el espacio sean linealmente dependientes, es decir, que sean coplanarios.

En el caso de matrices y determinantes, que sepan lo que es una matriz, que sepan cuáles son las reglas que hay que hacer para calcular determinantes, y, por último, que sepan calcular el rango de una matriz. Entonces, este es un tema donde tienen que hacer ejercicios. Aquí yo diría, en los otros, bueno, pues sí.

También diría que tienen que hacer algún pequeño ejercicio. Váyanse al libro de problemas, que tienen algunos ejercicios bastante adecuados, sobre todo algunos de ellos que un poco les repasan cuál es la idea de qué es un espacio vectorial, de dónde procede geoméricamente la idea del espacio vectorial. Entonces, váyanse allí.

Pero en el caso de determinantes y de matrices, ahí sí que tienen que calcular, tienen que saber hacer determinantes de matrices y rangos. Y, por último, en el 4, este es un tema eminente práctico, como hemos dicho, ahí tienen que hacer muchos ejercicios. O sea, yo les diría que ahí, hasta llegar al nivel de saber resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, donde, además, los coeficientes no son números fijos, sino que pueden ser incluso tener, por ejemplo, una variable.

Y, entonces, en ese caso, pues tienen que discutir el sistema en función de los valores de esa variable. El tema 4 es un tema que estamos dando ahora a mediados de enero, pero que les va a caer probablemente en el examen o algo parecido. No es que estemos diciendo lo que... Es

un tema importante.

Es un tema que, quizá, a lo largo de lo que queda de curso, deben seguir desarrollando, deben seguir practicando. Sí, yo les diría que sí, que este es un tema que podrían continuar y, para no, digamos, olvidarse durante todo el curso, pues continuar. De todas formas, hay algunos temas que después hacen alusión.

Por ejemplo, cuando tengan que hacer descomposición de fracciones racionales en fracciones simples, pues van a tener que resolver unos pequeños sistemas. Claro, no son tan complicados, quizá, como un sistema general que se les ponga en la lección 4 de la unidad didáctica 3, pero, bueno, ya van a tener que entrenarse un poco también en ese... Va a servir de recordatorio. Sí, va a servir de recordatorio.

Sin embargo, yo sí que les diría que continuarán también, por supuesto, en el caso del plano afín, pues cuando estudien las posiciones relativas de dos rectas, también van a tener que resolver sistemas. Pues muy bien, nos despedimos hasta el próximo programa, que veremos la unidad didáctica número 4. Buenas noches. Será el próximo 9 de febrero en Matemáticas Especiales cuando veremos y comentaremos la unidad número 4. Esta unidad nos habla del plano afín, del espacio afín, tema que no entrará en el examen, de polinomios y de fracciones racionales.

Pero nosotros nos despedimos hasta mañana. Gracias por su atención y feliz noche. La UNED les ha ofrecido dos horas y media de radio educativa.

Mañana comenzaremos a nuestra hora habitual, 8 y media de la noche, 7 y media en la Comunidad Canaria con el programa de formación del profesorado. Continuaremos con Ingeniería Técnica de Informática. En nuestro siguiente programa, la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.

Y hasta las 11 de la noche nos llevará el curso de acceso. Les agradecemos su compañía. Muy buenas noches.