

AC 10 95

Hola, buenas noches, bienvenidos a nuestro programa, el tiempo del curso de acceso directo a la universidad para mayores de 25 años, el CAT. Esta noche en Matemáticas Básicas nos acompaña el profesor Eduardo Ramos, con él veremos las lecciones 4 y 5, que nos hablan de números reales y geometría analítica. En el programa de esta noche de Matemáticas Básicas nos acompaña el profesor Eduardo Ramos.

Buenas noches. Buenas noches, Isabel. Vamos a ver las lecciones 4 y 5, que nos hablan de números reales y geometría analítica.

Las magnitudes físicas, como el tiempo, la distancia o el peso, se miden en la práctica mediante los números racionales, que ya vimos en el capítulo 2. Parece que los números racionales deben permitir expresar con exactitud cualquier magnitud, pero ya los matemáticos griegos descubrieron que eran insuficientes para tomar medidas de ciertas longitudes. Este sistema ampliado de números los llamamos reales, pero ¿qué son los números reales, profesor Ramos? Muy bien. Como muy bien acabas de recordarnos, en programas anteriores estuvimos estudiando cómo el hombre fue inventando los números.

Inventó los números naturales, vio un poco más adelante que no eran suficientes para resolver una serie de problemas que se presentaban en su vida cotidiana, ideó los enteros y, por la misma razón, un poco más tarde ideó los fraccionarios, que fue el último conjunto de números que estudiamos en la lección anterior. Con los números fraccionarios parecíamos haber resuelto todos los problemas de medida que podríamos considerar, porque si recordamos cómo construimos los números fraccionarios, a base de subdividir la unidad en unidades más pequeñas, conseguíamos considerar unas cantidades, que eran los divisores de la unidad, hasta un orden sin límite, es decir, podríamos considerar media unidad, un tercio de unidad, un cuarto de unidad, una centésima de unidad, una milésima de unidad, y parece que cualquier medida debería ser medible, cualquier cantidad debería ser medible con estos números fraccionarios. Pero este no es el caso, este no es el caso, y hace mucho tiempo, ya que el hombre descubrió que no le iban a llegar los números fraccionales, los números fraccionarios, para medir cualquier cantidad.

Fijemos en un ejemplo muy conocido, ya desde los tiempos de los griegos. Dibujemos un cuadrado, de un metro de largo, entonces nuestra unidad de medida, nuestra vara de medir, es el lado del cuadrado, un metro. Si queremos medir con esa vara la diagonal del cuadrado, tomamos ese metro, y encontramos que vale uno, y un poco más, consideramos la primera división del metro, el decímetro, y vemos que vale la diagonal un poco más que cuatro decímetros, y un poco menos que cinco decímetros, y entonces, ya sabemos que vale un metro y cuatro decímetros, y algo más, seguimos considerando con el nuevo divisor del lado, y medimos con el centímetro, y sabemos que vale un poco más que un centímetro, y un poco menos que dos, es decir, ya sabemos que tenemos un lado que vale uno cuarenta y uno, y un poco más que uno cuarenta y uno, y un poco menos que uno cuarenta y dos, y así

sucesivamente, y nos vamos encontrando, o nos vamos a, llegamos a encontrar que, con los divisores del lado del cuadrado, no somos capaces de encontrar una cantidad exacta que nos dé la medida precisa del lado del cuadrado.

Dicho de otra manera, y aunque parezca un poco difícil de entender a primera vista, necesitaríamos una sucesión infinita de aproximaciones de ésta, para llegar a medir con precisión el lado del cuadrado, la diagonal del cuadrado, con una vara igual a su lado, y con sus divisores fraccionarios. Este hecho que ya lo descubrieron los griegos, se puede demostrar que es así, ahí en el libro está escrita la demostración, que no vamos a entrar ahora porque es así, y realmente es una auténtica, auténtica novedad, es un auténtico problema. Resulta que hay medidas, hay longitudes, como es el caso, que no se pueden medir con los números racionales, que no tienen una cantidad exacta de números racionales.

Los griegos resolvieron el problema diciendo que tendría que haber unos números que no fueran racionales, que expresaran estas medidas también, pero no como números racionales, y por eso llamaron estos números irracionales, es decir, los que no se pueden expresar como razones, no que estén locos los números, sino que no se puedan expresar como razones. Entonces, la verdad es que ésta es la construcción que se puede hacer, aunque se hizo muy posteriormente esta idea de definir el número irracional por aproximaciones sucesivas de sucesiones minorantes del número y mayorantes del número que convergieran a una cantidad que diera con precisión, es la longitud de la diagonal del cuadrado, que seguramente ya todos nuestros alumnos saben que es un número que simbolizamos ahora con raíz de 2, es decir, un garabato en forma de raíz de un 2. Esto no es más que un símbolo, igual que el número 2 simboliza esa cantidad de dos unidades. Bueno, entonces, así conseguimos crear un nuevo conjunto de números que son los irracionales.

Estos, que no se pueden expresar como razones, más los que teníamos hasta el momento, los números racionales, los que se pueden expresar como razones, constituyen el conjunto de los números reales. Y una observación más, este conjunto de números reales, por tanto, incluye a los racionales también, y además a otros números, y recordemos que los racionales incluían a los enteros y estos, a su vez, a los naturales. Con esto tenemos un nuevo conjunto de números que nos permite hacer algunas cosas más.

Por lo tanto, los números reales son los racionales y los irracionales. Exactamente. Los reales son los racionales, que se pueden expresar como razones, como descubrimos en la lección anterior, y estos nuevos números que representan medidas, cantidades, a las que se llega por aproximaciones sucesivas, de sucesiones, que minoran el valor del número y que mayoran el valor del número.

Ahora, otra argucia, otra idea para representar números reales es pensarlo situado sobre una recta. Se dibuja una recta, en esa recta se marca un punto, que digamos es el origen, el cero, y se toma una unidad de medida, que sea, como decíamos antes, como el metro. Cualquier punto de esa recta representa un número real.

Es una manera gráfica de ver cómo los números reales tienen una representación, un ideograma, por decirlo así. Ahí hay un montón de números, muchos más, por así decirlo, que los racionales y, por supuesto, que los enteros, y en particular algunos números que tienen cierta popularidad en la vida corriente. En particular un número de este estilo es el número pi, el famoso número pi que se representa con un símbolo griego y que tiene una aproximación decimal muy conocida por todo el mundo, es 3, 14, 15, 92, etc.

Hay que entender bien este concepto. El número pi es el número pi. Eso de 3, 14, 15, 92 es una aproximación fraccional del número pi.

Nunca será el número pi. Nunca llegaremos a conocer con exactitud todas las cifras decimales del número pi por su propia definición, porque son infinitas. ¿Y cómo se ordenan los números reales? Y otra pregunta, ¿se puede operar con ellos? Efectivamente, los números reales, si repasamos un poco cómo los hemos definido a base de sucesiones de números racionales, todas las propiedades que teníamos para los números racionales, en particular las operaciones y la ordenación se heredan por los números reales.

Entonces, con los números reales se puede sumar, restar, multiplicar y dividir igual que los fraccionarios, no hay ningún problema. Y una idea que también es muy importante recalcar es que el conjunto de los números reales está totalmente ordenado. Podríamos tener la tentación, ya que hemos construido unos números aparentemente de una manera muy rara, que llenaban los huecos de una recta, podríamos a lo mejor tener la duda de si un número era más grande que otro, o no era más grande que otro, o habría números que fueran incomparables.

No, de la propia definición de número real, como su punto donde se juntan dos sucesiones, una que crece hacia el número y otra que decrece hacia el número, se puede deducir que el conjunto de números reales está totalmente ordenado, y eso quiere decir que, dados dos números reales cualesquiera, siempre se puede decidir cuál de ellos es el mayor. Bien, por tanto los números reales se pueden ordenar, están ordenados y se puede operar con ellos. Una vez explicados esto, ¿podemos hablar ahora de potencias y raíces? Sí, tenemos ahora un nuevo concepto que introducimos en este momento en el texto, que es, por así decirlo, una nueva operación.

Sabíamos sumar, restar, multiplicar y dividir, y ahora aprendemos a potenciar. En definitiva, la potenciación no es más que una repetición por factor de un número dado. De forma que si A es un número cualquiera y N es un número natural, la expresión, el símbolo, la representación A y arriba, un poquito elevado a la derecha, en forma de superíndice, la N , A , que leemos A elevado a N , significa que repetimos por factor el número A N veces, es decir, A por A por A N veces.

Esto es un nuevo concepto que, en definitiva, no añade nada más que porque sabemos multiplicar. Lo único que, en vez de escribir la registra A por A por A por A , escribimos de manera variada A elevado a N . Y esta operación de potenciación tiene una serie de propiedades que ahí están expresadas en el texto. En particular, podemos enunciarlas así.

Es decir, si queremos multiplicar dos potencias con la misma base, la base es el número al que se va a elevar y el exponente es el número al que se eleva, el número de veces que se repite por factor, pues digo, la primera propiedad diría, si multiplicamos dos potencias de la misma base, el resultado es elevar la base a la suma de los exponentes. Si tenemos dos números elevados a la misma potencia, es decir, A elevado a N y B elevado a N , y queremos multiplicarlos, el resultado es el mismo que multiplicar las bases A por B y elevar el producto al exponente N . Y una tercera propiedad es que si queremos elevar una potencia a su vez a otra potencia, es decir, si A elevado a N lo queremos elevar a su vez a M , el resultado es el mismo que coger el número A y elevarlo al producto de N por M . Estas son las propiedades de las potencias. También podemos definir la potencia con un exponente que es un número natural negativo, de la forma A elevado a menos N . Esto, por convenio, es lo mismo que calcular A elevado a N , que eso ya lo sabemos hacer porque acabamos de decir cómo se hace, y calcular el inverso de ese número, es decir, 1 dividido por eso, 1 dividido por A elevado a N . Entonces, eso es lo que llamamos A elevado a menos N , A elevado a una potencia de un número natural con exponente negativo.

El otro concepto que me habías preguntado, el raíz, es otro concepto nuevo que también podemos considerar en este momento. Bueno, pues es, por así decirlo, la operación inversa de la potenciación. Entonces, si tenemos un número B que tal que elevado a N da un número A , decimos que B es la raíz N -ésima de A . Es decir, sacamos la raíz N -ésima de A y nos da B . Repetimos, si B elevado a N es un número A , entonces B es la raíz N -ésima de A . Y esto se escribe de varias maneras.

Una muy antigua, digamos, o menos usada actualmente, o que se tiende a desusar por su incomodidad, es eso de B igual a una especie de pico. Se mete la A , que se le llama el radicando, y en el angulito del pico se ponía la raíz que se estaba extrayendo. Bueno, queda mucho mejor escribir A elevado a uno partido por N . Como ya sabemos manejar números fraccionarios, pues ponemos el exponente como un número fraccionario.

Uno partido por N . A elevado a uno partido por N es igual a B . Y eso es lo mismo que escribir que B es la raíz N -ésima de A . Y con esta idea ya tenemos cómo es elevar un número a una potencia, ya no de un número natural, como acabábamos de decir, sino incluso de un número fraccionario. Es decir, podemos escribir, hacer A elevado a M partido por N , es decir, M es un número natural, N también, M partido por N es un número fraccionario, entonces A elevado a M partido por N es lo mismo que dos cosas que son equivalentes. O bien la raíz N -ésima de A elevado a uno partido por N elevado a su vez a M , o bien la potencia M -ésima de A elevado a N sacándole a después la raíz N -ésima.

Esto, a lo mejor entre tantas M , N y A , se ponen un poco de lío, pero yo creo que en el libro está bastante bien escrito y hay un montón de ejemplos de cómo se hacen estos cálculos. Bien, y al añadir los números irracionales a los racionales, pues muchas ecuaciones pasan a tener solución dentro del conjunto de los números reales. ¿Están entre ellas las ecuaciones de segundo grado? Bien, esto es algo que hemos ganado ahora al haber considerado los números

reales.

Si recordamos, por ejemplo, cuando estuvimos introduciendo el resto de los números, los números enteros, los números racionales, motivábamos su introducción porque resolvían algún problema. Uno era el problema de la resta en cualquier par de números, otro era el problema de la división en cualquier par de números. Aquí hemos ganado una cosa al introducir los números reales, que es la siguiente.

Cualquier ecuación de la forma X elevado a N igual a A , cuando A es un número positivo, es decir, cualquier ecuación, repito, X es la incógnita, en el exponente de la orden N , en la ecuación igual a A como un número positivo, tiene solución dentro del conjunto de números reales. En particular la tiene la ecuación de segundo grado, la ecuación AX cuadrado más BX más C , es decir, tiene igual a cero. Tiene una incógnita, que es la X , que está elevada a el exponente 2, es decir, por eso se decía de segundo grado, y es AX cuadrado más BX más C igual a cero.

Esto es lo que hay que fijarse, quién es la A , quién es la B y quién es la C . A es el coeficiente que multiplica a la potencia de orden 2, B el coeficiente que multiplica a la potencia de orden 1 y C el término independiente. Bueno, pues esta ecuación, después de hacer una serie de cálculos que no son muy complicados y que se pueden seguir fácilmente en el libro, se encuentra que puede tener cero, una o dos soluciones, según el signo de lo que se llama el discriminante de la ecuación, que es B cuadrado menos $4AC$. B cuadrado, el coeficiente de la X elevado al cuadrado, menos 4 multiplicado por el coeficiente de la X al cuadrado y por el término independiente.

Bueno, pues según sea el signo de ese término, de ese discriminante, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, una solución o cero soluciones. Es conveniente repasar cómo se hace esto, es conveniente entender bien cómo es la solución de la ecuación de segundo grado porque son ejercicios que salen con mucha frecuencia. Es un tema importante, perdón.

Es un tema que digo que sale con mucha frecuencia, no sé si es más o menos importante que otros, pero bueno, es algo con lo cual hay que estar familiarizado con esa famosa fórmula de la solución de las ecuaciones de segundo grado, que están ahí bastante detenidamente explicadas en el libro, y que no quiero ahora detenerme con más simbología. En este capítulo se habla también de exponenciales y logaritmos y de aplicación a cálculos financieros. Sin embargo, estos apartados no son materia de examen.

¿Es conveniente el repaso de los mismos como ampliación o por el momento se pueden dejar aparcados? Bien, como ya decimos en varias ocasiones, tanto en la guía del curso como en otros programas, el libro intenta ser una especie de resumen de las matemáticas que consideramos los autores actuales en este momento y básicas para un universitario cuyo objetivo primordial no sean las carreras de ciencias. Entonces pensamos que estas cuestiones de los cálculos financieros son tremendamente útiles, especialmente en estos momentos en que estamos asediados y rodeados de problemas de intereses, declaraciones de dinero, de

renta, etc. La verdad es que somos conscientes de que es un poquito más complicado acordarse de algunas fórmulas, de algunos razonamientos, y entonces por eso están ahí incluidos en el libro, para que se manejen, se lean, tengan un recurso, un sitio en donde encontrar estos temas, pero teniendo en cuenta eso que digo que es un poquito más complicado recordar y el memorizar estas cosas, pensamos que lo podemos dejar fuera de lo que es materia de examen.

No fuera de lo que es matemáticas básicas, pero sí fuera de lo que es materia de examen. Podemos pasar a comentar a continuación el capítulo quinto, la geometría analítica. La geometría es una de las actividades matemáticas más antiguas, sin embargo durante siglos se estudiaba como una disciplina con pocas relaciones con otras ramas de las matemáticas.

Fue Descartes en el siglo XVII quien introdujo la sistemática de los números en el que hacer geométrico y fue en un discurso sobre el método donde propuso utilizar un sistema de referencia que en su honor se ha llamado cartesiano. Parece, profesor Ramos, que hay dos razonamientos contrapuestos en el estudio de la geometría, uno intrínseco, propiamente geométrico, y en el que se estudia en este capítulo, que es la geometría analítica. Muy bien, nos toca hablar de geometría.

La geometría, como ahí nos escribimos en el texto, es etimológicamente, significa la medida de la Tierra. La verdad es que, como muy bien acabas de decir y de recordarnos, la geometría es una de las actividades matemáticas más antiguas que encontramos en el pensamiento humano. Es bastante lógico.

Los temas que trata la geometría, los objetos geométricos, los puntos, las rectas, los planos, los polígonos, las circunferencias, los círculos, las pirámides, los cilindros, los conos, las esferas, son todos objetos muy familiares para el hombre desde la noche de los tiempos. Y entonces, no es de extrañar que el hombre se interesara por algunas propiedades de estos objetos. Y efectivamente, fue Euclides, en el siglo III a.C., quien hizo un gran manual, un gran tratado, los elementos de Euclides, un gran tratado sobre temas geométricos, llegando a resultados que mantienen hoy totalmente su vigencia, a base de una serie de postulados, los famosos postulados de Euclides, diríamos axiomas, verdades evidentes por sí mismas, algo que no se discute.

Euclides fue capaz de deducir y de extraer muchas de las propiedades de los objetos geométricos, tal como hoy las conocemos. En su razonamiento se utilizaba las propiedades de los cuerpos, las propiedades de la Tierra, en definitiva, las medidas de la Tierra. Utilizaba si las retas intersectaban, que si los ángulos eran iguales, que si los triángulos eran semejantes, etcétera, etcétera.

Este tipo de razonamiento, que no utiliza nada ajeno a la propia disciplina, al propio objeto de estudio como es la medida de la Tierra, da en llamarse o se denomina por aclararse, por ese afán que tenemos de darle un nombre a todas las cosas, geometría intrínseca, porque no utiliza nada ajeno a sí misma. Pero efectivamente, en lo que yo creo que fue uno de los

momentos estelares de la historia de la ciencia, con Renato Descartes, un filósofo y matemático francés que vivió en el siglo XVII, se descubrió algo que realmente fue revolucionario, que es como esas cosas, como eran los puntos, las rectas, los planos, los conceptos geométricos, tienen un equivalente en los números. Hay una manera de representar los puntos en base a un par de números.

Hay una manera de representar una recta en base a una ecuación. Algo que forma parte de lo que ya hemos estudiado, o sea, de la álgebra, las ecuaciones. ¿Es que la geometría y el álgebra son la misma cosa? Pues sí, en definitiva, sí.

Es dos maneras diferentes, dos maneras, pero completamente equivalentes, de representar el mismo objeto real. Una recta va a ser una ecuación, un punto va a ser un par de números. En definitiva, los objetos geométricos se pueden analizar con los elementos de la álgebra.

Esta es la famosa geometría analítica que domina un poco el pensamiento geométrico a partir de Descartes. Casi está contestada la pregunta que voy a hacer ahora, por lo que yo he podido entender, pero, ¿cuál es la diferencia, insistiendo un poco más, entre estos dos razonamientos? Pues mira, la mejor referencia que puedo hacer es remitir al ejemplo que está en el libro sobre cómo se demuestra el tema de Pitágoras, utilizando un razonamiento intrínseco y un razonamiento analítico, prácticamente un razonamiento analítico. Se ve que, mediante razonamiento intrínseco, se hace una larga demostración, basada en que esto es triángulo, y aquel y el otro son semejantes, tienen el mismo ángulo común, por tanto, el área esta y el área aquella son iguales.

El famoso teorema de Pitágoras que dice eso tan conocido que la cuadrada o la hipotenusa de un triángulo o rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Mediante un razonamiento analítico, es decir, mediante una ecuación y una fórmula y una suma si restas, es decir, algo que porcenezca el dominio de la algebra, se consigue la misma demostración con una gran economía de medios. Esto realmente es algo que merece que se reflexione sobre ello, que es algo que las matemáticas han aportado al pensamiento científico y han aportado, en definitiva, a la filosofía, a la propia filosofía, a la propia historia de las ideas en este momento.

¿Y cómo es el sistema de referencia cartesiano? Pues como casi todo en la vida, una vez que se ve, es una cosa muy simple, pero primero hubo que haberlo visto. Entonces, el plano cartesiano se basa en tres ideas. Se marca un punto, se elige un punto del plano que se denomina origen, se eligen dos rectas que pasen por ese punto y que se corten ese punto formando un ángulo recto, una se llama eje de abscisas y otra se llama eje de ordenadas, y en cada una de ellas se marca un punto que viene a significar la unidad de medida en cada uno de esos ejes.

Con estos ingredientes, un punto del plano se convierte en un par de números, que son la distancia, se toma el punto, se proyecta sobre cada uno de los ejes y se mide la distancia de ese punto origen que hemos dicho al punto de corte de la proyección del punto dado. Entonces, esa se llama su abscisa, la X, por así, en la terminología clásica, y en el otro eje se llama la Y, la ordenada. Esto es algo, por cierto, bastante conocido, todo el mundo es familiar con el sistema

de latitudes y longitud de respecto del ecuador y del meridiano, o del meridiano de Greenwich y del ecuador que se utiliza para referenciar los puntos de la Tierra.

Pues algo similar. Entonces, un punto, este es uno de los éxitos del sistema cartesiano, un punto que era un concepto primitivo en la geometría intrínseca, algo que no tiene dimensiones, algo que no se define, en la geometría analítica se identifica con un par de números reales, X e Y . Y para resumir este capítulo número 5, que a veces puede parecer algo abstracto, ¿cómo podríamos resumirlo? Bueno, pues el resto del capítulo se dedica a estudiar diferentes temas relacionados con este intercambio, esta equivalencia que hay entre pares de puntos y conceptos geométricos. Entonces, podemos estudiar, por ejemplo, cómo se mide la distancia entre dos puntos una vez que se conocen sus coordenadas X , Y y X' , Y' , aplicando el tema de Pitágoras.

Podemos averiguar cómo se representa una recta, que no viene siendo más que todos aquellos puntos X e Y que con sus coordenadas verifican una determinada ecuación lineal de primer orden con dos variables, de la forma $AX + BY + C$ igual a cero. Podemos identificar esa ecuación con una recta. Y con esa identificación podemos averiguar cómo es el punto de corte de dos rectas, simplemente resolviendo el sistema de ecuaciones que forman las dos rectas.

Podemos averiguar cómo es una recta que pasa por un punto. Podemos averiguar cómo es una recta paralela, una dada que pasa por un punto. Podemos introducir otro concepto que es bastante intuitivo que es el de la perpendicularidad y ver cómo están los coeficientes de las X y de las Y en las ecuaciones de esas rectas, de una recta y de su perpendicular.

En definitiva, podemos conocer una serie de cosas de tipo geométrico en base a conocer una serie de cosas de tipo algebraico, puntos y ecuaciones, un par de números y ecuaciones. Hay otra parte en esta lección que se dedica a los polígonos. ¿No entra esta parte? ¿No es materia de examen? Muy bien, gracias por recordármelo.

Efectivamente, en este capítulo tenemos el punto 5.11, que son polígonos y circunferencias, que me recuerdo que, si miramos el programa de la asignatura que aparece en el medio del curso, está escurida de nuevo de materia de examen, igual que hemos comentado hace un rato sobre la parte dedicada a los cálculos financieros. De nuevo, se recomienda aquí leer para saber cómo se calcula el área de un polígono, cómo es el área de una circunferencia, una serie de conceptos que son interesantes. Repito la misma frase que dije antes.

Son matemáticas básicas, pero no son materia de examen. Y, por último, recordando a los alumnos que en el próximo programa veremos las lecciones 6 y 7. ¿Tienen que estar ya entregando la primera prueba de evaluación? Venga, una palabra final de ánimo. No se desanimen, en estos días habrán entregado la segunda prueba de evaluación en la que se tratan estos temas.

Ánimo en el estudio, todavía queda mucho curso, todavía tenemos mucho trabajo por delante y es un buen momento con el año nuevo para reemprender con más fuerzas a lo mejor árido

estudio de las matemáticas, aunque sean básicas. Pues hasta el próximo programa, Profesor Ramos. Hasta el próximo programa, Isabel.

El curso de acceso ha sido el último programa de este viernes 19 de enero. El próximo lunes volveremos en esta misma emisora y a nuestra hora habitual. Nuestro primer programa será Aula de Filología.

Continuaremos con Revista de Geografía e Historia. Seguiremos con la Facultad de Ciencias y, por último, el curso de acceso. Esperamos que pasen un fin de semana y un feliz fin de semana.

Muy buenas noches. Subtítulos realizados por la comunidad de Amara.org Traducido por Marie Arias