

AC 15 36

Este es el programa para los alumnos que aspiran a ingresar en la Universidad Nacional de Educación a Distancia y que son mayores de 25 años. Acceso UNED. Esta noche, matemáticas especiales.

Comentarios prácticos sobre los temas que contiene la tercera unidad didáctica. De lunes a viernes entre once y once y media de la noche aproximadamente por Radio Nacional de España, Radio 3 en frecuencia modulada y emisoras de la red de Radio Cadena Española. Una hora menos en la comunidad autónoma canaria.

En el programa de esta noche vamos a hacer unos comentarios prácticos sobre el contenido de la tercera unidad didáctica de matemáticas especiales. Nos acompaña la profesora Teresa Aurecia. Buenas noches Teresa.

Buenas noches. Podríamos empezar primero recordando cuáles son los temas que se estudian en la tercera unidad didáctica. En esta tercera unidad estudiamos algunas cuestiones de álgebra lineal.

Los temas son espacios vectoriales, dependencia e independencia lineal de vectores, matrices y determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. Bueno, pues vamos a comenzar por el tema primero de esta unidad que es el de espacios vectoriales. En este tema seguimos con el estudio de las estructuras algebraicas que ya iniciamos en la anterior unidad.

Primero en la página 199 tenemos la definición de dicha estructura y unos cuantos ejemplos. La definición es así. Sea K un cuerpo.

Recordamos que un cuerpo es un conjunto en el que se definen dos operaciones internas. K con la suma debe ser un grupo conmutativo y K menos el cero, el elemento neutro de la suma, con la multiplicación debe ser un grupo conmutativo también. Sea E , se resuelve representar con letra E , el espacio vectorial sobre K . E con la suma es también un grupo conmutativo.

Se define después una aplicación del producto cartesiano K por E en E . Esta aplicación es una ley externa. A los elementos de K se le llaman escalares y a los elementos del espacio vectorial, vectores. Esta ley externa debe cumplir cuatro propiedades.

La primera es la distributiva de los escalares respecto a la suma de vectores. La segunda, la distributiva de vectores respecto a la suma de escalares. La tercera, asociativa de los escalares.

Y por último, el que exista elemento unidad en el conjunto de los escalares. Bueno, es la estructura más compleja de todas las que hemos estudiado hasta ahora porque es la última y engloba varias subestructuras y varias operaciones en cada una de ellas. ¿Podríamos repasar, volver a insistir en esa definición de espacio vectorial? Lo más complicado yo creo que es la ley externa porque hasta ahora en las estructuras anteriores trabajábamos sólo con leyes de

composición interna.

Por ejemplo, en la suma de números racionales, los dos sumandos eran elementos de Q y el resultado, la suma, también era un elemento de Q . A diferencia, en la ley externa tomamos un elemento del conjunto K , otro elemento del espacio vectorial y el resultado de esa ley es un elemento del espacio vectorial. Esa es la principal dificultad. Hay que distinguir bien entre los escalares, que son los elementos del cuerpo K sobre el que está definido la estructura de espacio vectorial y los vectores, que son los elementos de E , el espacio vectorial.

Y entender bien eso de la ley externa. Bueno, entonces continuando con... Después tenemos cinco propiedades que en realidad se deducen de la propia definición y que el alumno debe intentar demostrar, no porque le vayamos a preguntar esa demostración en el examen, pero sí para manejar bien la definición de espacio vectorial. Una actividad práctica de este tema puede ser, dado un conjunto en el que se definen dos leyes, comprobar si efectivamente es un espacio vectorial.

El primer ejemplo de los ejercicios de autocomprobación es de este tipo. En la página 207 del libro lo tienen. También en el primer ejercicio de la prueba objetiva, de esta prueba de evaluación a distancia 3, es de este tipo.

Después, en el párrafo siguiente, se estudian su espacio vectorial. Es un subconjunto, se suele representar con la letra E_0 , que tiene las mismas propiedades que el espacio vectorial con las operaciones inducidas por las de E . Para que un conjunto E_0 sea subespacio vectorial es condición necesaria y suficiente que sea un conjunto distinto del vacío y cerrado respecto de la suma y el producto por escalares. Esta proposición, que la tiene en la página 202, es muy importante porque con ella se suelen hacer los ejercicios relativos a esta parte.

Los ejercicios de autocomprobación, por ejemplo, el 2, 3, 4, 5 y 7, se hacen apoyándonos en esta proposición. También en la prueba objetiva de la prueba de evaluación a distancia, el número 2, es así. O sea, ver si se trata de un subespacio vectorial.

¿Y también se sigue la misma técnica de que se pueda dar, por ejemplo, que el enunciado del problema las dos leyes? Sí, en principio puede ser que sea un conjunto, por ejemplo R , que ya las operaciones son conocidas, la suma y el producto, entonces no definen. Pero puede ser un subconjunto más raro y definen unas leyes nuevas. Entonces hay que comprobar todas las propiedades.

La ley interna, las propiedades de grupo conmutativo y con la ley externa estas cuatro propiedades que hemos dicho anteriormente. Pues con esto, ¿qué más podemos decir de este tema? ¿Algo más? Bueno, de este tema sí está también el subespacio, un ejemplo muy importante de subespacio vectorial es el llamado engendrado por un conjunto de vectores. Es el formado por todas las combinaciones lineales de esos vectores.

Y bueno, entonces, ¿qué es una combinación lineal para entender este subespacio engendrado

por un conjunto de vectores? Bueno, pues dado un subconjunto D , formado por una serie de vectores $x_1, x_2, \dots, x_n$, se llama combinación lineal de elementos a la suma $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$. Siendo a_1 y a_n escalares. Es decir, elementos del cuerpo K . Y se llaman coeficientes de la combinación. O sea, que de a_1 a a_n , a_1 puntos suspensivos, a_n , esos son los escalares.

Los escalares se multiplican por los vectores del subconjunto, se suman, y así vamos obteniendo distintas combinaciones lineales. Y esos subvectores son los que representamos por la serie $x_1, x_2, \dots, x_n$, para obtener ese producto. Más adelante, en la proposición del apartado 1.3, se demuestra que el subconjunto engendrado por un conjunto de vectores es un subespacio vectorial.

Y además, que dicho subespacio no se modifica si se suprimen uno o varios vectores que sean combinación lineal de los otros. Un ejemplo de esto lo tenemos en la p.212, los ejercicios 9 y 10 de autocomprobación. Bueno, pues recordad esto, los ejercicios 9 y 10 de autocomprobación, en la p.212 del libro, para entender bien lo de la combinación lineal y su importancia en el concepto del espacio vectorial generado por un conjunto de vectores.

Podemos dejar el tema primero de esta tercera unidad y podemos pasar a comentar el tema segundo. El tema segundo es la dependencia e independencia lineal. Primero tenemos la definición de dependencia lineal de vectores.

Unos vectores se dicen que son linealmente dependientes o ligados cuando el vector nulo es una combinación lineal de ellos con algún coeficiente no nulo. De esta definición se deduce otra equivalente que a veces es más fácil de utilizar para problemas y es esta. Unos vectores son linealmente dependientes cuando alguno de ellos es combinación lineal del resto.

Si los vectores no son linealmente dependientes se dice entonces que son linealmente independientes o libres. Actividades prácticas de esta parte. Dados unos vectores estudiar su dependencia o independencia lineal.

En los ejercicios de autocomprobación del 1 al 4 son de esta parte. También la prueba de ensayo, de la prueba de evaluación de distancia del primero y el segundo son relativos a esto. Entonces recordar bien lo de la dependencia lineal que es una combinación de vectores.

Es una combinación lineal. En realidad, dados unos vectores, entre ellos se dice linealmente dependientes cuando cualquiera de ellos se puede poner como combinación lineal de los otros. Eso es, cuando los otros se pueden expresar en función de S . Y siguiendo con este tema 2. A continuación tenemos el concepto de base.

Una base es un conjunto de vectores del espacio que son linealmente independientes y un sistema de generadores. De esta manera, dado una base de un espacio vectorial, cualquier vector del espacio se puede expresar de manera única como combinación lineal de los vectores de la base. Esto es una proposición muy importante de la página 221.

Y así podemos identificar los vectores con sus coeficientes en esa combinación lineal. Estos coeficientes, que son únicos para cada base, se llaman coordenadas del vector en dicha base. Como ejercicios prácticos de este contenido pueden ser el 6 y el 7 de los ejercicios de autocomprobación y el cuarto de la prueba objetiva.

En estos ejercicios dan unos vectores y piden comprobar primero que son base y después hallar en dicha base las coordenadas de otro vector cualquiera. ¿Podrías por favor insistir en el concepto de base? Base es un concepto muy importante para espacios vectoriales, por luego lo veremos después. Es un conjunto formado por una serie de vectores que tienen que cumplir dos condiciones.

La primera, que sean un sistema de generadores. Es decir, que cualquier vector del espacio se pueda poner como combinación lineal de ellos. Y la segunda, que sean linealmente independientes.

Bueno, y siguiendo con este mismo tema, ¿qué otras cosas hay? En este tema, ya en realidad lo más importante que nos queda es el concepto de dimensión. Se dice que un espacio vectorial es de dimensión finita, ¿cuánto tiene un sistema de generador finito? Un importante resultado es la proposición 2.4.4 en la que se demuestra que todo espacio vectorial de dimensión finita tiene bases y además todas ellas tienen el mismo número de vectores. Ese número es lo que se llama dimensión del espacio B . Dependencia e independencia lineal, base y dimensión.

Esta es la sustancia del tema 2 que hay que entender bien y saber estos conceptos. Podríamos pasar al tema 3. Al tema tercero. El tema tercero es matrices y determinantes.

Quería dar un aviso. Este tema se suprimió el año pasado debido a que los libros llegaron con retraso. Como se cambió el libro, a los centros llegaron tarde.

Entonces se pensó que el menos mal era quitar este tema. Entonces, sobre todo los repetidores, que sepan que no. En este curso sí entra este tema de matrices y determinantes.

Tendremos que ver el concepto de matriz y el concepto de determinante. Y luego su aplicación. Y su aplicación.

Estos conceptos principalmente son fundamentales para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Que es el tema siguiente que veremos a continuación. Para ello debemos hacer más bien un estudio muy práctico de todo el tema.

Primero definen matriz. Una matriz de orden m por n se representa, se suele representar con la letra A mayúscula. Y es un cuadro de elementos de un cuerpo K que están agrupados en m filas y n columnas.

Es una ordenación en filas y columnas. Filas llamamos en horizontal y columnas en vertical. Aclaremos eso.

La notación que se utiliza para esto es, por ejemplo, un elemento que esté en la fila segunda y columna tercera se representa por A_{23} . A minúscula, a_{23} . Normalmente se representan por vocales y minúsculas. Y con dos numeritos. 2 3 quiere decir fila 2, columna 3. Primero la fila y luego la columna.

Después de ver esta definición vamos a ver los cálculos que conviene saber hacer con matrices. Primero calcular la matriz traspuesta de una matriz dada. Si la matriz se representa con A , la traspuesta con A' .

A mayúscula. Con mayúscula se representan las matrices y con minúscula los elementos del cuerpo K que forman esa matriz. La matriz traspuesta es aquella que se obtiene cambiando las columnas por la fila.

Lo que estaba en las columnas pasa a ser fila y viceversa. Esa es la traspuesta y se representa por A' . Después conviene saber sumar matrices.

Dar una matriz A y una matriz B . Para sumarlas hay que sumar los elementos correspondientes de las filas y las columnas. Es decir, por ejemplo, hay que sumar el primer elemento de la primera fila y primera columna. El A_{11} con el B_{11} . Y la suma de esos dos elementos nos da el primer elemento de la primera fila y primera columna de la matriz suma.

Y lo mismo el A_{22} con el B_{22} . El A_{33} y así sucesivamente. Es decir, cada elemento del mismo sitio se suma con el correspondiente del mismo sitio de la matriz B mayúscula. Un ejemplo está en la prueba objetiva de las columnas de evaluación de instancia número 6. Es sumar unas matrices.

Otra operación es multiplicar matrices por elementos de K . O sea, el producto de matrices por escalares. Para ello, dado un escalar K y una matriz A , hay que multiplicar todos los elementos de la matriz A por K . Eso es. Se cogen todos los elementos, con independencia de la fila y la columna en que estén, y se multiplican por ese número que sea K . Y luego, lo más importante, en realidad, yo creo que todo esto es... Hemos visto la suma y hemos visto la suma y casi la resta.

Si tuvieran que hacer una resta sería fácil de decidir. La realidad es que la resta es lo opuesto, sumar es lo opuesto. O sea, que ya en realidad queda incluido en la suma y luego en multiplicar por escalar.

Se va restando elemento a elemento. Y en el producto, lo que se hace es multiplicar el escalar por cada uno de los elementos. Bueno, estas son operaciones de las más importantes que hay que hacer con matrices.

En general, estas son sencillas. Y ya luego pasamos a la principal, que es saber calcular el determinante de una matriz. Para ello, les recomendamos que vayan estudiando los determinantes que tienen calculados en el libro.

Que vayan por orden de dificultad. Por ejemplo, que empiecen a ver uno que tienen de orden 2×2 . Una matriz de orden 2×2 , es decir, una matriz con 4 elementos.

En la página 238 tienen calculado el determinante. A continuación, tienen el determinante de una matriz de orden 3×3 . En ambos ejemplos, aparece un esquema que se llama regla de Sarrus.

Para recordar el desarrollo y los signos del determinante. Es una forma un poco complicada, pero con este esquema resulta sencilla. Y luego después, en la página 245, tienen ya un ejemplo de un determinante de una matriz 4×4 .

En realidad, se hacen matrices de orden muy grande, pero normalmente se hace eso 4×4 , como mucho 5×5 . O sea, no se van a poner a obtener determinantes demasiado complicados, sino a partir de matrices sencillas. Y se puede aplicar siempre la regla de Sarrus para hacerlo.

Bueno, a partir de la regla de Sarrus para orden 3×3 . Para orden 4×4 tienen que desarrollar el determinante por una fila o por una columna. Pueden elegir la fila o la columna que quieran.

Para ello es conveniente utilizar aquella que sea más sencilla. Por ejemplo, en la página 245 están desarrollando el determinante por la segunda fila. Porque en esa fila hay dos ceros.

Entonces, a la hora de desarrollar el cálculo es mucho más sencillo. Sí, interesa coger filas o columnas incluso que tengan ceros. Y ya al desarrollar, aparecen en el desarrollo determinantes 3×3 , que ya se hace por la regla de Sarrus.

Es muy interesante el ejercicio 6 de autocomprobación de la página 256. Es un buen ejemplo que sirve. Ejercicio 6, página 256, ejercicio 6 de autocomprobación de este tema.

Es un ejemplo claro de cómo calcular el determinante. Y esto hay que saberlo porque no nos vamos a engañar. Esto cae seguro.

Sí, es muy importante. En la prueba de ensayo, en el ejercicio número 3, también es de este tipo. Y es muy parecido a uno que tienen hecho en el libro, el 7 de autocomprobación.

O sea que para hacer el ejercicio 3 de la prueba de ensayo, de las pruebas de evaluación a distancia, pueden hacerlo análogamente mirando el ejercicio 7 de autocomprobación del libro. Es importante entonces recordar la cuestión de que este tema es sobre todo práctico. Y para aplicarlo después en el tema siguiente.

Para aplicarlo después a la resolución de sistemas de ecuaciones que se estudian en el tema siguiente. Pero antes de pasar a ese tema siguiente. En este tema en realidad ya lo que nos queda es saber calcular el rango de una matriz.

Conviene que sepan las propiedades de los determinantes. Pues se pueden aplicar en algunos casos para facilitar el cálculo. Los ejemplos que hemos visto antes podrían calcular cualquier tipo de determinante utilizando la regla de Sarrus y el desarrollar por una línea.

Ahora, si manejan bien estas propiedades que vienen al final del tema, les facilita el cálculo. Por ejemplo, en la prueba objetiva, el ejercicio 8, se puede hacer muy fácil utilizando estas propiedades. Y queda al final una ecuación sencilla de hacer.

Si lo haces sin propiedades, queda una ecuación de un grado grande y es más complicado. ¿Pero se mete en métodos complicados como el método de Ruche? No, únicamente a la vista de los elementos que forman las filas y las columnas de la matriz, buscar hacer combinaciones lineales para conseguir ceros. Claro, para reducirla a una matriz más sencilla.

Bueno, pues dicho esto, ya sí podemos comentar el tema cuarto, los sistemas de ecuaciones lineales, que precisamente este tema en él lo que se hace es aplicar toda la teoría de los determinantes que hemos expuesto para resolver estos sistemas de ecuaciones. Uno de los problemas centrales de la forma lineal es precisamente eso, el estudio y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Este tema, lo mismo que el anterior, tiene que ser práctico.

Dado que sepan ustedes, dado un sistema, es resolverlo. En el libro se estudian dos métodos. Uno es el de Gauss, que también se llama delimitación.

Este método se basa en que a cada sistema de ecuaciones lineales se le puede asociar de manera natural, la manera de hacerlo es con los coeficientes de la ecuación, un sistema de vectores. Con la particularidad de que si dos sistemas de vectores son equivalentes, equivalentes significa que generan el mismo subespacio vectorial, los correspondientes sistemas de ecuaciones también lo son. Equivalentes en sistemas de ecuaciones significa que tienen la misma solución.

De esta manera, aplicando esto y una serie de propiedades que ya estudiamos en el tema 1 de espacios vectoriales en las combinaciones lineales, se puede transformar el sistema de ecuaciones lineales inicial en otro equivalente más sencillo, en el que cada ecuación tenga alguna incógnita menos que la anterior. Tienen tres ejemplos hechos en la página 269 y siguientes, y están bastante explicados paso por paso las distintas combinaciones lineales hasta llegar al último sistema, que es un sistema muy sencillo. Bueno, este es uno de los métodos, que es el método de Gauss, y ahí en el libro viene un ejemplo para resolverlo.

En principio vienen tres. Vienen tres métodos distintos. Tres ejercicios sobre este método.

Eso, como ejemplo, es en la página 269, que luego, en los ejercicios de autocomprobación, vienen en total 10 ejercicios y están hechos la mitad más o menos por el método de Gauss y el otro por el teorema de Rouchet. Sí, que es el otro. En el otro método se utiliza.

El de Rouchet. El de Rouchet se utiliza. Primero el teorema de Rouchet, que dice que un sistema de ecuaciones lineales es compatible.

Compatible quiere decir que tiene solución. Cuando la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz horlada con la columna de los términos independientes tienen el mismo rango. Entonces, ven que es necesario saber calcular el rango de una matriz para aplicar este teorema.

Luego, después, una vez que se sabe, el teorema en realidad solo sirve para saber si es compatible o no. Para luego calcular las soluciones, en el caso de que sea compatible, se utiliza la regla de Cramer. La regla de Cramer viene explicada y aplicada para resolver ejemplos.

En la página 276 tienen varios ejemplos. De este tema en realidad lo único es eso. Es saber, estudiar y resolver un sistema.

Un caso muy típico, que de hecho en algún examen se ha puesto y en los ejercicios de las pruebas de evaluación a distancia, el último ejercicio, el ejercicio 5, es de ese tipo, es darles un sistema de ecuaciones lineales en los cuales alguno de los coeficientes sea una variable, una letra a , una letra m . Entonces, hacer un estudio para distintos valores de esa variable. Ver, según los valores de la variable, si el sistema es incompatible, es decir, que no tiene solución, o es compatible, que tiene solución. Y en el caso de ser compatible, si es única la solución, se llama compatible determinado, o si tiene más soluciones, es compatible indeterminado.

¿Y qué les recomendaríamos a los alumnos? ¿Que dominaran bien los dos sistemas, el de Gauss o el de Rouchet, o que se aprendieran bien un sistema? Hombre, en principio con que se aprendan bien uno es suficiente. Hombre, el problema de aquí es que cuanto más sepas es más ágil. Entonces, a la hora del examen no tienen tanto problema que a lo mejor para hacer un determinante, pues están mucho tiempo cuando en realidad utilizando otro camino es más fácil.

Y les resta tiempo para a lo mejor otro tipo de problemas o cuestiones que son más difíciles. Bueno, que se aprendan los dos, pero si tienen mucha dificultad, pues que se aprendan uno de los métodos. Mejor uno seguro, más vale poco y bien.

Que no todo. Como os he hecho referencia al último ejercicio que se propone en el cuadernillo de evaluación de distancia número 2, podríamos comentarlo. Concretamente es el ejercicio 5, que dice estudiar el sistema.

Bueno, todos recordaréis las ecuaciones de ese sistema. Es $ax - 2y$ igual a menos 1. Esa es la primera ecuación. La segunda ecuación es $2x - y$ menos az igual a 1. Y la tercera ecuación es menos x más $2z$ igual a 1. Todos lo recordaréis porque lo tenéis en el cuadernillo de evaluación de distancia número 2. Es el último ejercicio.

Entonces aquí la primera cuestión es que hay que plantear los dos determinantes. El determinante que solamente tiene, digamos, todos los coeficientes que están antes de los iguales, que es la matriz simple. La matriz de los coeficientes.

La matriz de los coeficientes. Y luego hay que hacer la matriz ampliada, poniendo todos los números. Añadiendo una última columna.

En este caso sería una cuarta columna. Que es todos los números independientes que están detrás de los iguales. Y entonces eso nos va a servir para ver si el sistema es compatible o no.

Entonces tendríamos... El primero sería, por ejemplo, a igual, poniendo los coeficientes, por columnas, por filas lo voy a decir. a menos 2, 0. Primera fila. Segunda, 2 menos 1 menos a . Tercera, menos 1, 0, 2. Calculamos el determinante de esa matriz.

El determinante a . El determinante de esa matriz queda menos $4a$ más 8. Ese es el valor del determinante. Entonces, si eso es igual a 0, que eso sería para el valor a igual 2, el rango de esa matriz es distinto que el rango de la matriz ampliada. La matriz ampliada sería la a , añadiéndole la cuarta columna, que con columna sería menos 1, 1, 1. Añadiéndole esa columna.

Eso es. Y al calcular de esa a , que además está muy claro que la primera es una típica matriz 3×3 , mientras que esta es una matriz 4×3 . Esta es una matriz 3×4 .

Son 3 filas y 4 columnas. Y entonces, al hacer esta matriz 3×4 y calculamos el determinante... Entonces nos queda que el rango es 3. El rango de esta matriz ampliada. Como el otro era 2, el rango de a es distinto que el rango de la matriz ampliada y el sistema es incompatible.

Es decir, no tiene solución. Eso para a igual a 2. En cambio, si tomamos cualquier valor distinto de 2, el rango de a es igual al rango de m , igual al número de incógnitas. Entonces, el sistema es compatible determinado.

En este caso, se puede calcular la solución por la regla de Cramer. Y entonces, para aplicar la regla de Cramer, ¿cómo lo plantearíamos? ¿Cuáles serían los determinantes que habría que calcular? Bueno, pues para determinar las soluciones, primero, la primera variable x , la solución sería un cociente, que en el numerador tenemos el determinante en el cual la matriz es la matriz a , sustituyendo la primera columna por la columna de los coeficientes independientes. O sea, menos 1, 1 y 1. Menos 1, 1 y 1. Eso es el numerador.

Y luego partido por 4, en el caso, por ejemplo, para a igual a 1. Si a es igual a 1, el determinante de a vale 4. Entonces, partido por el determinante de a . Bueno, y eso sería la manera de calcular la x . Para calcular la y , sería igual. La y es un cociente, el numerador, el determinante de la matriz a , donde se sustituye la segunda columna por menos 1, 1, 1. Eso es... El denominador, el determinante de a . Sigue siendo 4, nuevamente. Y luego la z es lo mismo.

Análogamente, en la z , el determinante se sustituye la última columna, la tercera columna, por menos 1, 1, 1, que son los coeficientes independientes. Eso es el numerador. Y partido por el determinante de a . Y los alumnos que hayáis hecho este ejercicio, pues habéis visto que por este sistema se calcula lo que se tenía que calcular cuando uno intenta resolver un sistema de ecuaciones, que son la x , la y y la z . Concretamente la x , haciendo esta operación, da un 2, la y , tres medios, y la z , también tres medios.

Esto para el valor a igual a 1. En principio, en el enunciado del problema se pedía solucionarlo, resolverlo, cuando para un valor de a que fuera compatible. Como el sistema es compatible para todo a que sea distinto de 2, por ejemplo, hemos dado el valor a igual a 1, que es sencillo,

y quedan las soluciones, 2, 3 medios, 3 medios. Pues muchas gracias Teresa Aulecia por tus explicaciones.

Esperamos haber ayudado a los alumnos a comprender mejor todo el contenido de la tercera unidad didáctica. Y nos despedimos hasta el siguiente programa en que abordaremos la cuarta unidad didáctica. Buenas noches.

Y con el curso...