

AC 15 79

Hola, buenas noches, bienvenidos a nuestro programa, el tiempo del curso de acceso directo, el CAD. Esta noche dos espacios ocuparán nuestro tiempo, comenzaremos con matemáticas especiales y continuaremos con introducción a las ciencias políticas, hablaremos de pueblo, nación y estado. Y ahora sí, comenzamos ya con matemáticas especiales.

Esta noche en nuestro programa de matemáticas especiales nos acompaña el profesor Antonio Costa. Muy buenas noches, Antonio. Buenas noches, Isabel.

Bien, vamos a ver los temas que van del 10 al 17. Entramos en temas totalmente diferentes, ¿verdad? Efectivamente, sobre todo son temas que hacen alusión a la geometría y también hay algunos temas de carácter más algebraico, por ejemplo el de los números complejos. Pues podemos comenzar con este tema 10, que es una introducción a la geometría.

Exactamente, en este tema lo que se hace es explicar los elementos de geometría más usuales, pues qué es un punto, qué es una recta, qué es un ángulo, entonces son conceptos que realmente los tenemos casi por nuestra vida cotidiana. Es de resaltar, por ejemplo, también qué es un triángulo, pues yo creo que todo el mundo lo sabe, sin embargo pues es necesario que a uno se lo definan con los términos matemáticos. Sí, hay dos teoremas, es lo que iba a comentar, que hay dos teoremas que parecen muy elementales pero que son muy importantes, ¿no? Sí, al final de este tema están el teorema de Tales y el teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras, pues creo que no es necesario ni decir qué es lo que dice, pero son muy importantes porque en ellos se encuentra toda la base para después hacer el capítulo de trigonometría. ¿Cuál es el interés, entonces, de este tema para el alumno? Bueno, una introducción, el que coja cierta confianza y cierta soltura. Es una introducción, sobre todo conceptual, a estos conceptos de geometría y también es importante que conozcan estos dos últimos teoremas, sobre todo el teorema de Tales.

Y diríamos que en la parte de ejercicios, en la parte práctica, es muy necesario que sepan utilizar muy bien el teorema de Tales. Hay muchos ejercicios referentes a este tema, por ejemplo, pues dada la sombra de un árbol y, por ejemplo, cuál es la sombra que proyecta una varilla, pues sabiendo la longitud de la varilla, cuál es la altura del árbol. Bueno, pues este tipo de problemas o problemas muy parecidos, de semejanza de triángulos, tienen que saberlo resolver muy bien.

Son muy elementales, son prácticamente problemas que antes se daban en la educación primaria, pero nos hemos dado cuenta que muchas veces en el estudio de cosas mucho más complicadas, pues realmente los fallos se verificaban en estos temas. Entonces, es importante que el alumno los domine muy bien. Bien, ya hemos entrado entonces en este tema de la geometría, pero en el tema 11 pasamos a la trigonometría, ¿así cómo podemos definirlo? Es otro tema muy clásico, trigonometría pues etimológicamente quiere decir medir triángulos.

Entonces, en principio se dan unas razones, que se llaman las razones trigonométricas, que creo que todos también conocemos, el seno, el coseno, la tangente, y se enseña qué quiere decir cada una. En realidad es cuando uno tiene un triángulo rectángulo, pues tiene que saber que el cociente de uno de los catetos con la hipotenusa recibe el nombre del seno o del coseno. Y tiene que saber que hay unas tablas, bueno, ya no se utilizan tablas, hay calculadoras que uno dando el valor del ángulo, pues le determina exactamente cuál es el valor del seno, del coseno, de la tangente, de esas razones trigonométricas.

Estas razones trigonométricas se utilizan después para, sabiendo por ejemplo un lado o un cateto, la longitud de un cateto, un ángulo, y sabiendo que el triángulo es rectángulo pueden conseguir determinar cuáles son las longitudes del resto de los lados, o cuáles son las medidas de los ángulos que restan. Entonces, bueno, pues ese tipo de ejercicios es importante que lo sepan realizar. Es un tema de hacer también muchos ejercicios.

Efectivamente. Y además, como se puede ver, ahí aparecen muchas fórmulas, fórmulas. Hay que aprenderse todas esas fórmulas de memoria para que al alumno le pueda asustar un poco.

No, no es necesario que todas las sepan de memoria, pero sí que hay algunas que son muy fundamentales. Por ejemplo, pues la que dice que el seno al cuadrado más el coseno al cuadrado es igual a uno, pues esa la tienen que saber al dedillo, o bien cuál es la fórmula de la tangente en función del seno y del coseno. Hay otras, estas digamos que sin duda, pero después hay otras muchas, pues que no es necesario que las dominen perfectamente, pero sí que son útiles, sobre todo a lo largo del curso les van a ser útiles para, por ejemplo, integrar, después tendrán que integrar funciones trigonométricas y entonces van a tener que aplicar, si no es una, pues es otra.

Entre ellas, pues yo destacaría las fórmulas que hacen alusión, por ejemplo, al seno de una suma, al coseno de una diferencia, o bien también a las razones de un ángulo doble. Entonces, esas también las tienen que conocer. Son fáciles de memorizar, pero bueno, si uno tiene una idea de cómo se han obtenido, que aparece en el texto, pues es mucho más sencillo.

Por lo tanto, en este tema, no solamente hacer ejercicio, sino que no haya que aprenderse todas las fórmulas, sí la mayoría, las que son las más posibles, vamos. Exactamente. Bueno, si se saben todas y saben cómo se deducen todas, pues muchísimo mejor.

Entramos en el tema 12, en otro tema de introducción, esta vez a la geometría analítica. ¿Cómo podemos definirlo? Bueno, la geometría analítica, pues surge con la idea de intentar reflejar en números las cuestiones geométricas. Una cuestión geométrica, pues es algo físico, algo que estamos viendo, algo que nos entra por los ojos.

Mientras que algo que es algebraico, como números, pues es algo que podemos calcular, que podemos operar con ello. Entonces, una de las grandes ambiciones de las matemáticas es poder reflejar en cifras todo aquello que está dentro del mundo físico, en particular dentro de la geometría. Pues para ello se utiliza la idea de las coordenadas.

Entonces esa es la idea fundamental y, bueno, pues es lo que se explica en este tema. Probablemente la mayoría de los alumnos sepan ya lo que es una coordenada. De todas maneras, si es muy importante, el que no lo sepa, pues creo que muy bien, ¿no? El tema, pues ocurre lo mismo que con el tema 10.

Hay algunas nociones fundamentales, pues que quizá son conocidas por todos, lo que son las coordenadas de un punto, pero la experiencia nos ha dicho que no siempre es así. Y entonces, bueno, pues es importante que ustedes lo tengan bien definido, no solamente lo que son las coordenadas de un punto, sino lo que son los distintos cuadrantes que hay en el plano, dependiendo de que las coordenadas sean positivas o negativas. Y luego, al final, pues hay una sección que está dedicada a las razones trigonométricas no solamente de ángulos que aparecen, digamos, en geometría, sino de un ángulo que puede medir cualquier cosa, o sea, que puede medir entre 0 y 2π , o sea, entre 0 y 360 grados.

Entonces, esto, pues esos signos que aparecen en esas razones trigonométricas se explican muy bien por medio de coordenadas. Entonces, es aquí donde aparecen y se explican. También es necesario que lo sepan, porque después se van a definir lo que se llaman las funciones trigonométricas, que realmente son funciones definidas en toda la recta real, es decir, definidas para cualquier número.

Entonces, aquí van a encontrar la justificación de esa definición. Y entramos ya en el tema 13, los vectores. ¿Habrá una definición también de vectores? Sí, en realidad, para que se hagan una idea, por supuesto en el libro están totalmente bien definidos, pues es como una flecha, una flecha, y entonces hay una relación de equivalencia.

Digamos que dos flechas son equivalentes, o son la misma, sí, tienen la misma dirección, el mismo sentido, y además tienen la misma longitud. Entonces, bueno, pues con esta definición de vector, pues se pueden definir unas ciertas operaciones y una forma de hacer también álgebra. Entonces, este es un concepto que también viene de la física, ¿no?, en realidad.

Y entonces es muy importante y da lugar a muchos conceptos nuevos, y después se utilizará mucho en geometría, también en geometría analítica, como veamos. Operaciones con vectores. ¿Cómo se puede operar con vectores? Bueno, pues fundamentalmente se pueden sumar vectores de una forma también geométrica, se toman dos vectores, se ponen con un origen común, se dibuja un paralelogramo, y la diagonal es precisamente la suma de esos dos vectores.

También se pueden multiplicar por un número, y también se puede hacer una cosa que se llama el producto escalar. Sí, el producto escalar es otro concepto que viene aquí y que es conveniente que se explique aquí. Efectivamente, es un producto que también, bueno, pues es una propiedad o algo que es algebraico, porque se define también para, digamos, objetos que están dentro de un espacio vectorial, que es un concepto algebraico, y será cómo se puede hacer el producto vectorial.

Pero tiene un origen también geométrico, y que está muy relacionado con el ángulo que forman dos vectores. En realidad, pues es el producto de las longitudes de los vectores multiplicado por el coseno del ángulo que forman las dos flechas entre sí. ¿Este tema también hay que trabajarlo mucho a nivel de ejercicios? Sí, sí, por supuesto.

Es decir, que un alumno tiene que saber perfectamente qué operaciones tiene que hacer, o qué tiene que hacer para sumar vectores, para hacer el producto escalar de dos vectores. También es importante destacar lo que se llaman las coordenadas de un vector, y lo que es una base dentro del plano vectorial, para que se den cuenta que también, lo que ocurría antes, este concepto físico de flecha, de vector, pues se reduce también a números. Tiene también unas coordenadas.

Y con esas coordenadas, pues se pueden sumar, también se puede multiplicar por un número, y también se puede hacer el producto escalar. Entonces, sin pasar, digamos, a la geometría, pues pueden hacer ese producto escalar que en realidad les está diciendo el ángulo que forman esas flechas y cómo son sus longitudes. El tema 14 son los números complejos.

También comienza con la definición. Efectivamente. Bueno, pues un número complejo viene para resolver un tipo de operación que no es posible en los números reales, que son los números más normales, más usuales.

En particular, pues es saber hacer las raíces cuadradas de números negativos. Entonces, bueno, pues en principio basta con saber cuál es la raíz de menos uno. ¿Y se puede operar con números complejos? Claro.

Se pueden hacer todas las operaciones que se pueden hacer con los números normales, con los números reales. Es decir, que se pueden sumar, se pueden multiplicar, se puede multiplicar un número real por un número complejo, se pueden dividir, también se pueden extraer raíces cuadradas, y es más, se pueden resolver, por ejemplo, todas las ecuaciones de segundo grado. Entonces, todas estas cosas es necesario que el alumno las sepa.

Es decir, que el alumno sepa no solamente qué se pueden hacer, sino cómo se hacen. Es decir, si les damos dos números complejos, pues que los sepa dividir y que sepa obtener la forma de ese número complejo, que es la división de dos dados. En este tema, este tema 14, ¿qué más podríamos...? Por ejemplo, pues una cosa tradicional es el saber extraer raíces de números complejos.

Es una cosa tradicional, o raíces enésimas, por ejemplo, de un número complejo. Y lo que se llama, pues, es echar un número complejo en su forma trigonométrica, que viene, otra vez, a recuperar aquello que estábamos antes, la línea de la geometría. Es decir, los números complejos se representan como vectores en el plano.

Y entonces resulta que extraer una raíz cuadrada tiene que ver con cierta operación geométrica. Pasamos al tema 15, que son los vectores del espacio. Y también comenzamos con

la definición.

Bueno, pues, si un vector en el plano era una flecha dentro del plano, pues ahora un vector en el espacio es una flecha, pero dentro del espacio. Lo que ocurre es que ahora, pues, antes había dos coordenadas para definir un vector, ahora hay tres coordenadas. En realidad, pues, se puede decir todo lo que habíamos dicho sobre vectores del plano.

Es decir, que hay operaciones, se pueden sumar, se pueden también multiplicar por un número. Sin embargo, hay un concepto que es el de producto vectorial que sí se podría explicar. Exactamente, hay, digamos, una operación nueva, que es el producto vectorial.

Entonces, el producto vectorial, el producto escalar, si recordamos lo que ocurría en los vectores del plano, que también se puede definir entre vectores del espacio, lo que hacía es que a dos vectores le asignaba un número. Es decir, que cuando hacíamos el producto de dos vectores obteníamos un número que ya no era un vector. Sin embargo, lo que ocurre con el producto vectorial es que cuando tomamos dos vectores del espacio obtenemos otro vector más.

Es decir, es una operación que se define para pares de vectores del espacio y lo que da lugar es a un vector más. Es un vector que además es ortogonal, es perpendicular a los dos vectores dadas y que tiene una dirección y una longitud que está determinada también por las longitudes y el ángulo que forman entre ellos esos vectores. En este tema 15 nos habla también de otras propiedades del producto vectorial.

¿Cuáles serían? Bueno, pues es como en el caso de las propiedades de la suma y del producto de un número escalar por un vector, pues también el producto vectorial tiene ciertas propiedades que es necesario reconocer. Por ejemplo, la propiedad distributiva con respecto a la suma. Eso tiene que conocerlo y son propiedades que son usuales y que a veces se aplican.

Pero lo que sí que es importante es que también sepan cómo se realiza un producto vectorial con coordenadas. Es decir, no solamente saber el concepto geométrico de cómo es el producto vectorial de dos vectores que ha podido dibujar con dos flechas sino que si uno conoce las coordenadas de cada uno de los vectores pues tiene que conocer cómo se obtienen las coordenadas del producto vectorial. Entonces aquí aparece otra vez una aplicación de lo que se había visto en otro grupo de temas que eran las matrices y los determinantes.

Entonces verá cómo realizando un determinante va a poder conseguir hallar el producto vectorial. Y podemos pasar a comentar el tema 16 la geometría analítica del plano. Empezamos hablando de los puntos del plano y de las rectas del plano.

Efectivamente. Ya vimos cómo en el tema 12 aparecían las coordenadas y introducíamos lo que era la geometría analítica. Pues aquí ahora vamos a especificar y a irnos a la geometría analítica del plano.

Entonces vemos cómo cada punto tiene unas coordenadas eso ya lo sabíamos por el tema 12

pero las figuras más importantes que aparecen en el plano en la geometría del plano, pues son las rectas. Pues resulta que aquellos puntos que están en las rectas pues tienen unas coordenadas y esas coordenadas tienen que verificar una ecuación. Entonces esa ecuación es la ecuación de la recta.

Entonces verán, tienen que saber muy bien calcular ecuaciones de rectas. Por ejemplo, si le dan dos puntos pues se tiene una única recta que pasa por esos dos puntos. Si le dan las coordenadas de esos dos puntos tiene que saber calcular la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos.

Hay otras muchas cuestiones que tiene que saber de este tema. Por ejemplo, dos rectas en el plano pues pueden ser paralelas o pueden cortarse. Entonces tiene que ver cómo las ecuaciones de esas rectas, qué tienen que verificar para que se verifique una cosa u otra.

Es decir, qué ocurre si nos dan las ecuaciones de dos rectas. Bueno, pues resulta que para saber si se cortan o no, lo que tendrá que ver es si el sistema de esas dos ecuaciones tiene o no solución. Entonces ahora vemos que tenemos una aplicación de otro de los temas que habíamos visto antes, el tema 9 de resolución de sistemas de ecuaciones.

También nos habla de posiciones relativas de dos rectas en el plano. Efectivamente, esto es lo que decíamos en las posiciones relativas que podían cortarse, ser paralelas. También tiene que ver qué quiere decir que sean paralelas.

Hay un concepto más que es el vector de dirección de una recta. Aquí aparecen vectores, que es lo que decíamos antes. ¿Para qué serían útiles los vectores? Además de en física, podrán estudiar aquellos que tengan esa asignatura, pues aquí también en geometría se utilizan los vectores.

Y no solamente también una forma de ver cuál es la posición de dos rectas es viendo el ángulo que forman esas dos rectas. Entonces tienen que saber cómo calcular el ángulo entre dos rectas. Entonces aquí aparece una aplicación del producto escalar, de lo que habíamos hablado del producto escalar de dos vectores.

¿Qué es lo que tendrán que hacer? Saber calcular vectores de dirección de cada una de las rectas, hacer el producto escalar y entonces ahí van a tener que aparece el coseno del ángulo de esas dos rectas. Bueno, siempre y cuando hagan la división por los módulos de los vectores que hayan considerado. También vemos aquí, o me llama la atención que ya se ve que hay otros temas como determinantes, como ecuaciones, que en esta parte de geometría van a tener ya mucha importancia.

Efectivamente, aquí confluyen muchos temas. En realidad aquí es uno de los temas donde pueden empezar a ver algo que si continúan estudiando matemáticas les aparecerá muchas veces, y es la unidad de las matemáticas. Es decir, no se trata de unas nociones todas deslabazadas y que cada cosa es importante por sí misma sino que después, conforme se va

avanzando, pues unas cosas se relacionan con otras.

En este caso de la geometría analítica del plano es muy importante. Vemos que hay sistemas de ecuaciones, vemos que hay determinantes, verán ustedes también que hay ecuaciones que tienen que también tener cálculo vectorial, que tienen que saber multiplicar vectores, muchas cosas. Sí, que vamos subiendo una montaña pero que todo va relacionado.

Y tenemos el tema 17. Este tema 17 que habla de geometría analítica del espacio no va a ser materia de examen, sin embargo sí tiene mucha importancia. Sí, claro.

Muchas veces ya lo he dicho y creo que también en este medio, que es una desgracia que siempre este sea el tema que un poco se excluye del examen. Pero bueno, realmente como se considera que el temario es muy amplio y muy difícil para una persona que hace mucho tiempo que no estudia, el ponerse al día en todas en todos estos temas pues siempre para facilitar esa labor se elige algún tema para decir que no se considera dentro del examen. Entonces como todos los años siempre se elige este tema.

Quizá pues no porque sea menos importante que los demás. Yo diría que incluso es un tema que prácticamente se estudie lo que se estudie, pues van a encontrar cosas relativas a él. Por ejemplo, si estudian física, pues lógicamente van a tener incluso más que utilizar el tema de la geometría analítica del plano, pues aparecerán cosas en el espacio.

El espacio donde nos movemos es de tres dimensiones. Entonces bueno, pues saber cuál es la ecuación de un plano, la ecuación de una recta en el espacio, saber cuáles son las posiciones relativas que puede ocupar una recta en el espacio y un plano pues son enormemente importantes. Aquí también pues verían cuáles son las utilidades, por ejemplo del producto vectorial, de dos vectores en el espacio.

Pues verían cómo se puede usar para obtener, por ejemplo, una recta que sea perpendicular a dos rectas que se cruzan, perdón, que se cortan. Entonces bueno, pues es un tema que yo diría que es muy importante y que es una lástima que no se dé, pero que si tienen tiempo y energías pues que es muy conveniente que lo conozcan y que lo estudien. Esa sería la recomendación que lo repasen y si no es ahora, por lo menos cuando estén un poquito más liberados.

Efectivamente. Y ahora sí me gustaría un poco ver de estos temas sobre todo del tema 10 al 16 que son los que van a ser materia de examen qué es lo más importante y qué recomendaciones podemos hacer al alumno para que lo estudie. Bueno, pues mire yo diría que todos ellos son importantes es decir, que no debería sacar después de lo que voy a decir este tema no, este sí, porque entonces le ocurrirá pues que llegará al último tema y resulta que si no ha estudiado o ha estudiado menos a fondo alguno de ellos, pues va a tener que utilizar algunos conceptos que le han definido antes.

Pero bueno, si tengo que decir un poco una orientación de qué es lo que es más importante, pues yo diría que en principio pues tienen que estudiar muy bien la trigonometría porque es un

tema pues que les va vamos, se les va a parecer además en muchas más ocasiones a lo largo del curso, sobre todo cuando estudien los temas de derivación e integración, pues las funciones más usuales que van a tener que utilizar son funciones trigonométricas. Después también pues diría que el tema de los números complejos también es muy importante y no debe nunca olvidarse de él y el de geometría analítica del plano. En cuanto a los por ejemplo, de vectores del espacio pues claro, la aplicación fundamental pues sería después a la geometría analítica del espacio como no van a tener que o ese tema no se les va a exigir pues claro, ya sí que queda pues un poco bueno, con una importancia un poquito menor.

Estos temas ya hemos dicho que son los más importantes esto sin decir que los otros no lo sean porque los otros además son casi una iniciación una introducción que son necesarios sobre todo para aquel que no esté muy metido en el tema, pero cómo se deben estudiar, son temas hemos dicho de hacer muchos ejercicios, muy prácticos entonces primero quizás estudiar el concepto y después irse directamente a los ejercicios y hacer todo lo que se pueda además los ejercicios, tanto los de este texto como los del libro de ejercicios pues están graduados de forma que uno pueda irlos haciendo conforme va estudiando la teoría. Esta parte de geometría que está aquí introducida parece como que entre dos partes diferentes sin embargo no es así, es como decíamos antes una línea continua que sirve, todo está pensado para algo No solo eso, sino que habría que decir que todas estas nociones de geometría han estado prácticamente en el origen de todas las matemáticas es decir que todo lo que se va a ver después de temas de análisis por ejemplo de derivación de integración, también vienen o provienen de problemas geométricos en particular de la derivación viene de intentar calcular la tangente a una curva tangente y curva son conceptos geométricos en cuanto a la integración es determinar el área de una cierta superficie también es un problema geométrico entonces bueno pues está todo relacionado La recomendación ahora, bueno estamos empezando la última recta es que hagan todos los ejercicios posibles, de esta parte y de todo lo anterior también para que afronten con más garantías lo que viene después Yo pondría también hincapié en que hagan por ejemplo ejercicios de trigonometría que sepan resolver cualquier triángulo que les den un triángulo con unas determinadas medidas en dos lados y un ángulo que sepan qué fórmulas tienen que aplicar y qué es lo que tienen que hacer para determinar el resto de los ángulos son problemas que son usuales y son instructivos además en cuanto por ejemplo a los números complejos pues que hagan muchas operaciones es decir que dividan números no solamente los que vienen en el texto sino también aquellos que por ejemplo pues se puede uno fabricar, uno coge un número complejo otro número complejo y dice bueno cuál es el cociente lo único es que no tendrá la solución pero bueno puede fabricarse muchos más ejercicios Pues con esto nos despedimos, muchas gracias y muy buenas noches Muchas gracias