

... Asignatura Matemáticas Básicas, título Aplicaciones entre Conjuntos, autor Equipo Docente de Matemáticas Básicas, fecha de emisión 17-12 del 80. ... Vamos a comenzar esta emisión radiofónica haciendo un breve repaso de los conceptos que estudiamos el día anterior, conceptos que nos servirán de apoyo para las nuevas definiciones que trataremos de explicar en la emisión de hoy. ... ¿Recuerdan a qué llamábamos una correspondencia entre dos conjuntos A y B? ...

correspondencia entre dos conjuntos A y B era un criterio que relacionaba elementos del conjunto A con elementos del conjunto B. Este criterio debía ser lo suficientemente claro para poder saber los elementos que están relacionados y los que no lo están. Al primer conjunto o conjunto A se le llamaba conjunto de partida y al segundo conjunto o conjunto B conjunto de llegada. Muy bien, recuerden además que una correspondencia entre dos conjuntos puede venir definida mediante pares ordenados de elementos, de forma que el primer elemento del par corresponde al conjunto de partida y el segundo corresponde al conjunto de llegada y los pares ordenados están formados por los elementos que están relacionados entre sí. También recuerdo que una propiedad característica de las correspondencias era que no se exigía ninguna condición ni a los elementos del conjunto de partida ni a los elementos del conjunto de llegada.

del conjunto de llegada. Era simplemente un criterio que asocia elementos de dos conjuntos. De acuerdo. ¿Pueden decirme ahora a qué llamábamos origen e imagen de un elemento en una correspondencia? En una correspondencia entre dos conjuntos A y B, llamábamos imagen de un elemento X del conjunto A a un subconjunto del conjunto B, formado por los elementos que están relacionados con X. Y definíamos el origen de un elemento Y del conjunto B de llegada como el subconjunto del conjunto de partida A, formado por los elementos que estaban relacionados con Y. Bien. Como en las correspondencias no poníamos ninguna restricción, el origen y la imagen de un elemento podía estar formado por uno, por varios o por ningún elemento. Una vez que hemos repasado estos conceptos, vamos a introducir la idea de aplicación en... Entre conjuntos.

El otro día estudiamos el concepto de correspondencia entre dos conjuntos. Ahora, a partir de este concepto, definimos el de aplicación. Diremos que una aplicación entre dos conjuntos A y B es una correspondencia que asocia a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B. Entonces, una aplicación es un tipo especial de correspondencia, ¿no es así? Efectivamente. Una aplicación es una correspondencia que cumple algunas condiciones. Pues debe cumplir que todos los elementos del conjunto A de partida tengan una única imagen en el conjunto de llegada. Por lo tanto, ponemos restricciones a los elementos del conjunto de partida. Según esto, resulta que toda aplicación es una correspondencia, pero toda correspondencia no es una aplicación. De acuerdo. Ya vimos que en las correspondencias no poníamos la misma función.

ninguna condición a los elementos. Sin embargo, en las aplicaciones ponemos restricciones a los elementos del conjunto de partida. Estas restricciones son que todo elemento del conjunto de partida tiene que tener elemento imagen y esta imagen tiene que ser única, es decir, ser un único elemento. ¿Y a los elementos del conjunto de llegada no se les pone restricciones en las aplicaciones? No, los elementos del conjunto de llegada pueden estar relacionados con uno, con varios o con ninguno del primer conjunto, igual que ocurría en las correspondencias. Más adelante, cuando definamos los distintos tipos de aplicaciones, sí pondremos restricciones a los elementos del conjunto de llegada. ¿Las aplicaciones entre conjuntos pueden también definirse mediante pares ordenados de elementos? Sí, naturalmente. Una aplicación entre dos conjuntos A y B puede venir definida por un conjunto de pares ordenados, de tal forma que la aplicación entre dos conjuntos A y B puede ser definida por un conjunto de pares ordenados, de tal manera que la primera componente del par pertenece al conjunto A y B.

A y la segunda pertenece al conjunto B. En este conjunto de pares ordenados se deberá cumplir que todos los elementos del conjunto de partida figuren como primera componente de un par y solamente de uno, ya que todo elemento del primer conjunto tiene que tener una imagen y esta ser única. ¿Nos puede poner un ejemplo de aplicación entre dos conjuntos? Por supuesto. Sea el conjunto A formado por los días de la semana y el conjunto B formado por todas las letras del abecedario español. Definimos una correspondencia de A en B de la siguiente forma. A cada elemento de A, es decir, a cada día de la semana, le relacionamos con la letra por la que empieza. ¿Esta correspondencia de A en B será también una aplicación? Yo creo que sí, pues a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un elemento del conjunto de llegada. Y solamente le corresponde uno, ya que cada elemento de A...

Empieza por una sola letra. Muy bien. Es una aplicación porque cumple los dos requisitos necesarios que son que cada elemento del conjunto de partida tenga imagen y que esa imagen sea única. ¿Pueden

decirme los elementos de estos conjuntos que están relacionados entre sí mediante esta aplicación? Pues el elemento lunes se relaciona con la letra L, el martes con la M, el miércoles también con la M, el jueves con la J, el viernes con la V, el sábado con la S y el domingo con la D. De acuerdo. He observado que hay dos elementos, el martes y el miércoles, que tienen la misma imagen, pues los dos empiezan por la misma letra. ¿Esto puede darse en una aplicación? Por supuesto que puede darse. Dos elementos pueden tener la misma imagen. Lo que no es posible es que un elemento tenga dos imágenes distintas, pues ya hemos dicho que cada elemento debe tener imágenes. Una imagen única.

En una aplicación entre conjuntos, la imagen de cualquier elemento tendrá que estar formada por un único elemento, mientras que el origen de un elemento puede estar formado por uno, por varios o por ningún elemento. Bien, una vez que ya sabemos lo que es una aplicación, vamos a considerar algunos tipos de estas. En primer lugar, veamos a qué se llama aplicación inyectiva. Diremos que una aplicación entre dos conjuntos A y B es inyectiva cuando cada dos elementos distintos de A siempre tienen imágenes distintas. Según esto, el ejemplo que veíamos antes de la aplicación entre el conjunto de los días de la semana y el de las letras del abecedario no será una aplicación inyectiva, pues hay dos elementos, el martes y el miércoles, que tienen la misma imagen. Efectivamente, es una aplicación, pero no es inyectiva. ¿Podría ponernos un ejemplo de aplicación inyectiva entre dos conjuntos? Sí, vamos a considerar un ejemplo. Supongamos que 15 viajeros...

quieren subir a un autobús con 20 asientos. Consideramos como conjunto A el formado por los 15 viajeros y como conjunto B el formado por los 20 asientos. Definimos una correspondencia de A en B diciendo que a cada viajero se le asocia con el asiento que ocupa. Suponemos que todos los viajeros se sientan. Es la correspondencia. ¿Será una aplicación? Yo creo que sí, porque a cada elemento de A, o sea, a cada viajero, se le asocia con un único elemento de B. Es decir, con un único asiento, pues se supone que una persona no puede ocupar más de un asiento. Bien, veamos ahora si pueden decirme por qué esta aplicación es inyectiva. Es una aplicación inyectiva porque dos personas distintas nunca tienen la misma imagen, ya que no se pueden sentar en el mismo asiento. Muy bien, dense cuenta de que la aplicación es inyectiva. Dense cuenta que en las aplicaciones inyectivas puede haber elementos del conjunto B que no sean imágenes de ningún tipo.

elemento del conjunto A. Así en nuestro ejemplo quedan asientos libres, pues hay más asientos que viajeros. Fíjense también que en las aplicaciones inyectivas ponemos restricciones a los elementos del conjunto de llegada, ya que un elemento de este conjunto no puede ser imagen de dos o más elementos, solamente puede ser imagen de uno o de ningún elemento. Vamos a ver ahora otro tipo de aplicaciones, las llamadas aplicaciones suprayectivas o sobreyectivas. Diremos que una aplicación entre dos conjuntos A y B es sobreyectiva cuando todo elemento del conjunto B es imagen de algún elemento del conjunto A. Con un ejemplo creo que entenderemos mejor este concepto. Bien, vamos a considerar un ejemplo de aplicación suprayectiva. Sea un conjunto B formado por diez madres y el conjunto A.

conjunto A formado por todos los hijos de estas madres. Definimos una correspondencia de A en B, diciendo que a cada elemento de A, es decir, a cada hijo, se le asocia con su madre. ¿Pueden decirme si esta correspondencia es una aplicación? Es una aplicación porque cada elemento del conjunto de partida, es decir, cada hijo, tiene una imagen en B y una sola imagen, ya que cada hijo tiene únicamente una madre. Muy bien, ¿y por qué esta aplicación es sobreyectiva? Pues es sobreyectiva porque todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento del conjunto de partida, ya que toda madre es imagen de los elementos de A que sean sus hijos. Bien, a ver si me dicen ahora si esta aplicación suprayectiva es también inyectiva. Yo creo que no es inyectiva porque puede haber dos elementos de A que tengan la misma imagen en B. Basta considerar dos elementos.

del conjunto A, que sean hermanos, tienen la misma imagen ya que tienen la misma madre. De acuerdo. Esta aplicación que hemos considerado es suprayectiva, pero no es inyectiva. Vamos a considerar, por último, el otro tipo de aplicaciones que estudiaremos. Se trata de las aplicaciones biyectivas o biunívocas. Diremos que una aplicación entre dos conjuntos A y B es biyectiva cuando sea a la vez inyectiva y suprayectiva. Es decir, una aplicación entre dos conjuntos A y B es biyectiva cuando cada dos elementos distintos del conjunto A tienen imágenes distintas en el conjunto B, y todos los elementos del conjunto B son imágenes de algún elemento del conjunto A. Según esta definición, la aplicación entre dos conjuntos A y B es biyectiva cuando la aplicación que veíamos entre el conjunto de los hijos y el de sus madres es biyectiva.

no es biyectiva, porque es sobreyectiva pero no es inyectiva. ¿No es cierto? Sí, así es. Vamos a considerar seguidamente un ejemplo de aplicación que sea biyectiva. Modificando un poco el ejemplo

anterior podremos definir una aplicación biyectiva. Consideramos como conjunto B el formado por 10 madres y como conjunto A el formado por sus 10 hijos, suponiendo que cada madre tiene únicamente un hijo. Entonces la aplicación consiste en asociar a cada hijo con su madre. ¿Por qué esta aplicación es biyectiva? Primeramente es aplicación porque cada elemento de A, es decir, cada hijo, tiene una única imagen, que es su madre. Además es inyectiva porque dos elementos cualesquiera de A distintos tienen imágenes distintas en B, ya que hemos puesto la condición de que los hijos sean únicos. Es decir, no hay dos hijos que tengan la misma imagen. Y también es...

suprayectiva o sobreyectiva, porque cada madre es imagen de un elemento de A, es imagen de su hijo único. Muy bien, por lo tanto, al ser una aplicación inyectiva y sobreyectiva, es una aplicación biyectiva. He observado que en este ejemplo de aplicación biyectiva, los dos conjuntos A y B, de partida y de llegada, tienen el mismo número de elementos. ¿Esta condición tiene que verificarse siempre? Tiene que verificarse siempre que se defina una aplicación biyectiva entre conjuntos finitos, es decir, entre conjuntos que tengan un número finito de elementos. Nosotros, en general, siempre definiremos aplicaciones entre conjuntos que sean finitos. Si se fijan, observarán que al definir los distintos tipos de aplicaciones, hemos puesto restricciones a los elementos del conjunto de llegada. Para terminar esta...

emisión radiofónica, vamos a hacer como siempre un breve repaso de los conceptos que hemos introducido. ¿Recuerdan a qué llamábamos una aplicación entre dos conjuntos A y B? Una aplicación entre dos conjuntos A y B era una correspondencia que asocia a cada elemento de A con un único elemento de B. También decíamos que al definir una aplicación entre dos conjuntos, imponíamos restricciones en el conjunto de partida. Bien, definan ahora lo que es una aplicación inyectiva. Una aplicación entre dos conjuntos A y B es inyectiva cuando cada dos elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B. De acuerdo, ¿y qué era una aplicación suprayectiva o sobreyectiva? Definíamos una aplicación sobreyectiva como aquella en la que todos los elementos del conjunto B son imágenes de algún elemento. Bien, definan por último lo que era una aplicación.

aplicación biyectiva. Decíamos que una aplicación entre dos conjuntos era biyectiva cuando era a la vez inyectiva y sobreyectiva. También decíamos que al definir los tres tipos de aplicaciones poníamos restricciones en el conjunto de llegada. Muy bien, para terminar les recomendamos como siempre que estudien y amplíen estos conceptos en sus libros de texto. Gracias.