

## AC 15 50

Buenas noches y bienvenidos un día más a nuestro programa, el curso de acceso, que les acompañará hasta las once de la noche compartiendo este tiempo de radio educativa y cultural. Este curso nos pueden sintonizar en toda España a través de Radio 3, frecuencia modulada y como el curso anterior en la frecuencia 1359 de la Onda Media en Radio Nacional de España. Los profesores de la sede central se dirigen a los alumnos para que con sus explicaciones puedan profundizar en la diversidad de temas que aquí exponemos.

Otro de nuestros objetivos es captar la atención de todos los oyentes interesados en la historia, el arte, la literatura o la economía, con las 24 áreas de conocimiento que aquí tratamos. En nuestro programa de esta noche, matemáticas especiales, nos acompaña el profesor Antonio Costa. Con él veremos la segunda unidad didáctica que nos habla de grupos, anillos y cuerpos, sucesión de números racionales, el cuerpo de los números reales y el cuerpo de los números complejos.

Esta noche con el profesor Antonio Costa vamos a abordar la segunda unidad didáctica de matemáticas especiales. Buenas noches. Buenas noches Isabel.

¿Qué temas nos vamos a encontrar en esta unidad? Bueno, pues al contrario de lo que ocurría con la unidad didáctica 1, esta unidad didáctica es una unidad didáctica donde hay temas completamente diferentes. En este caso se comienza con un tema puramente algebraico y después se habla de sistemas de numeración. Habla el primer tema de grupos, anillos y cuerpos.

¿Qué es un grupo? ¿Un anillo y un cuerpo? Bien, pues esto es algo que es una nomenclatura puramente matemática. Un anillo no tiene nada que ver con lo que uno lleva en el dedo, ni un grupo con un grupo de personas. Son estructuras algebraicas donde se definen operaciones.

Entonces, en un grupo lo que ocurre es que hay una operación definida y con esa operación se puede, por así decir, se puede dividir. Es lo que se dice que esa operación admite elemento inverso. En el caso de un anillo pues hay dos operaciones.

Con una de ellas se puede dividir, pero con la otra no siempre. Es por ejemplo lo que ocurre con los números enteros. Uno siempre puede dividir los números enteros.

Y por último está el cuerpo donde hay dos operaciones y con las dos se puede dividir y se puede hacer las cuatro reglas. Por así decir, se puede sumar, restar, multiplicar y dividir. Entonces es una generalización.

Pues claro, en principio yo ya he dicho aquí, he estado hablando de números. Estoy diciendo esto de dividir y en realidad esto de una operación pues no se puede, no tiene por qué estar definido en un conjunto de números. Puede ser unos conjuntos completamente abstractos que no tienen nada que ver con un número y con nada parecido.

¿Tienen los grupos, anillos y cuerpos, por tanto, cosas en común y cosas no en común? Sí, por supuesto. Un anillo pues tiene una estructura de grupo dentro y un cuerpo tiene una estructura de anillo y por lo tanto también tiene una estructura de grupo. Entonces lo que es fundamental en esta lección es que aprendan estas definiciones, que las vean y después no se metan en mucho más.

No va a ser, esta no es una lección esencial para el resto. Es bueno que sepan lo que es estas estructuras, que sepan que realmente se pueden definir en esta generalidad tan grande, pero realmente los grupos, anillos y cuerpos que van a manejar van a ser siempre sistemas de números. Van a ser números donde van a poder hacer operaciones.

Hemos dicho que tienen que aprender las definiciones. ¿También las propiedades? Yo diría que no. Léanlas, léanlas simplemente, vean que son propiedades que si sustituyen esas letras con números pues son propiedades que conocen perfectamente y ya está.

Es muy abstracto entonces. Es una lección muy abstracta y quizá pues es bueno que se empiecen a ver cosas abstractas pero quizá pues no sea el momento de introducirlas en su máxima generalidad. Nos habla el texto también de estructuras numéricas.

Sí, después el resto de las lecciones son sistemas de numeración, estructuras numéricas, donde ya son números de verdad de los que uno ha manejado toda la vida. Después de este tema abstracto pasamos a los números racionales. ¿Qué es un número racional? Un número racional es una fracción.

Realmente esto sí que hemos tenido ocasión de verlo muchas veces y de manejarlo y son los famosos quebrados que tantos quebraderos de cabeza nos traen. Entonces antes de hablar de números racionales pues es necesario también saber qué son los números enteros y qué son los números naturales. Los números naturales pues son aquellos que aparecen cuando uno cuenta elementos de un conjunto, pues el 1, el 2, el 3. Los números enteros pues son los números naturales más los números negativos y el 0. Y entonces a continuación pues cuando uno divide pues le aparecen los números racionales.

Entonces tiene que saber que un número racional pues es una fracción y que bueno pues una fracción la puede poner en forma decimal. Lo que ocurre es que hay veces en que el número de decimales es infinito. Es como cuando uno pone un tercio.

Uno pone un tercio y le da la maquinita a la calculadora y se queda pues que bueno pues tiene infinitas cifras decimales. Lo que ocurre es que cuando ocurre esto pues generalmente se repiten con una periodicidad. ¿Y qué es la sucesión de números racionales? Pues una sucesión de números racionales pues es un conjunto que se va digamos, bueno en realidad para definirlo bien es una aplicación de los números naturales en el conjunto de números racionales.

Pero bueno eso es una definición por así decir para los matemáticos. Una sucesión pues es poner un número racional después de otro y nunca se acaba. Entonces lo que ocurre es que

hay ocasiones en que esas fracciones pues se van acercando hacia un número racional o bien hacia algo.

Hacia algo que no es tampoco un número racional. Entonces nos interesa que sepan lo que es una sucesión. Que es simplemente pues un número racional después de otro y que nunca acaba.

Y después que empiecen a ver qué es el concepto de límite. Entonces aquí está una de las cosas quizá más difíciles de todo el curso. Que es el concepto de límite.

Entonces el límite es algo a lo cual puede tender una sucesión. ¿Nos podría explicar un poquito más esto? Por ejemplo en el caso de un tercio pues uno va tomando decimales. Pues pone la máquina y la enchufa pone 1 dividido entre 3 y entonces dependiendo de la potencia pues le va a dar una serie de decimales.

En principio pues le da 0,3333. Pero si la máquina no es más potente pues le dará más decimales. Entonces le dará 0,33333 muchas veces.

Lo que ocurre es que por muchos decimales que uno vaya obteniendo nunca llega a saberlo o a tener exactamente un tercio. Tendría que tener infinitos infinitos decimales. Entonces si uno puede formar la siguiente sucesión.

Primero 0,3. El siguiente elemento de la sucesión es 0,333. El siguiente es 0,333.

El siguiente es 4 veces 3 decimales iguales a 3 y así sucesivamente. Entonces lo que ocurre es que esos números racionales se van aproximando a otro número racional que es un tercio. Bueno pues esto es una sucesión y eso es el límite.

Hay ocasiones en los que estos números racionales pues pese a parecer que se aproximan a algo, aquello donde se aproximan resulta que no es un número racional. Entonces eso es la problemática. El límite por tanto casi también tiene algo de abstracción.

Pues sí, sí tiene algo de abstracción y después es un concepto muy difícil de formalizar. Entonces aparece en el texto pues un lenguaje que en principio pues parece bastante complicado. Aparecen unos épsilons, unos peltas, una serie de cosas que es bastante difícil por lo menos la primera vez que uno los lee el captar cuál es el significado y el significado es el de aproximación.

Entonces es un tema muy muy difícil. Entonces nosotros qué es lo que vamos realmente a exigir del alumno. Bueno, léalo, intente entender lo que es el límite pero sobre todo haga ejercicios.

Los ejercicios puede uno no haber captado perfectamente lo que quiere decir el límite pero sin embargo ya puede hacer sucesiones de números racionales. Una sucesión de números racionales pues viene generalmente dada por una fórmula y entonces lo que hay es una serie

de operaciones, una serie de formas de actuar sobre esa fórmula para saber hacia dónde se va a aproximar. Se trata entonces de saber aplicar el concepto de límites.

De saber aplicarlo, eso es lo que es importante, saber hacer ciertas operaciones para saber hacia qué tiende una sucesión. Dentro de este tema de los números racionales hay alguna otra cosa también que haya que destacar. Bueno, saber antes de nada, claro, es una cosa que es obvia pero es casi más importante todavía que el concepto de límite.

El concepto de límite es muy importante y es un tema casi central dentro del curso. Es que hay que saber operar con números racionales. Entonces parece, ya digo, obvio pero no lo es tanto cuando nosotros después nos vienen los ejercicios pero repasen las operaciones en qué vamos.

Sepan cómo se suman números racionales, cómo se multiplican, cómo se dividen. Bueno, es una cosa pues que ya digo que es sencilla y que todo el mundo quizá ha aprendido pues en la escuela pero conviene tenerlo bien fresco porque por supuesto todo lo demás se va a basar en ello. Es algo que se olvida, conviene recordarlo.

Y pasamos ya al tema 3. El tema 3 y el tema 4 que nos hablan de números reales y complejos. Podemos empezar hablando de los números reales. Muy bien, bueno, pues los números reales es un tema ya bastante difícil.

Casi definir un número real pues ya tiene una dificultad y entonces en la lección ya han visto que la definición de número real pues es una clase de equivalencia de sucesiones de números racionales que son sucesiones de Cauchy. Entonces bueno pues con esta definición pues realmente a ustedes les va a costar mucho enterarse de lo que es un número real. Yo les diría que un número real es un número que tiene o puede tener infinitas cifras decimales.

Entonces no pongan demasiada interés o demasiada atención en leer esta lección porque es una lección muy difícil. Entonces una introducción formal y precisa de lo que son los números reales tal y como está hecha en el texto pues es un tema que quizá pues se sale de lo que es el objetivo del curso. Así que sepan lo que es un número real, sepan que un número real es un número que puede tener infinitas cifras decimales, aunque bueno pues a partir de una cifra decimal dada todas son cero o bien que se repiten periódicamente.

Entonces se trata de en realidad de un número racional, es decir, los números reales contienen a los números racionales o bien no hay ningún tipo de ley en esas cifras decimales y entonces bueno pues van apareciendo los decimales sin ningún tipo de fórmula conocida y entonces bueno pues dan un verdadero número real. Uno dice bueno pues qué números tan extraños pues no lo son tanto y aparecen con frecuencia y además por ejemplo el número pi que es quizá el número real que no es racional por excelencia pues todos hemos tenido contacto alguna vez con él o bien el número raíz cuadrada de 2 o sea que son números que aparecen constantemente y bueno pues hay que saber que no son números racionales que no se pueden expresar como una fracción o sea que yo diría que eso es el tema, saber que es un número real y saber que hay números reales que no son racionales. Hay que saber entonces que aunque los

números reales puedan ser racionales pueden no serlo.

Y bueno y otra de las cosas que tienen que conocer también es que se pueden hacer las operaciones que se pueden hacer con números racionales igual que con las fracciones se podían sumar multiplicar dividir y restar pues lo mismo se puede hacer con los números reales. Pero tiene que ser ya tiene una complicación. Tiene una complicación y es lo que ocurre pues con las operaciones con radicales o sea pues cómo se hace pues para sumar digamos expresiones donde aparecen radicales pues tienen que recordarlo también y tienen sobre todo ahí les diría que vayan a libros de boob donde se hacen muchas fórmulas de este tipo y se hacen muchas expresiones así y practiquen.

Esta lección por tanto hay que saber la definición pero también hay que saber la aplicación. Sí hay que saber la aplicación lo que ocurre es que en el texto pues está todo muy enfocado hacia la parte teórica entonces yo les diría que se salgan un poco o sea que la parte teórica la pasen muy por encima simplemente ya les digo con lo que he podido decir ahora de lo que es un número real es suficiente y sin embargo dedíquense a esta parte práctica de saber manipular números reales. Es fácil saber manipular los números reales aunque no se entienda muy bien el concepto.

Sí, es mucho más fácil. El concepto de números reales es muy difícil mientras que la manipulación que es algo automático pues es relativamente sencilla. Y el tema cuarto que nos habla de los números complejos.

Los números complejos al igual que los números reales aparecían un poco para completar esos números racionales pues los números complejos aparecen para poder hacer otro tipo de operación. En los números reales lo que se puede hacer es extraer raíces cuadradas pero raíces cuadradas de números positivos en los números complejos pues lo que vamos a poder hacer es extraer raíces cuadradas pero de cualquier número también de los números negativos y entonces bueno pues los números complejos pues es otro sistema de numeración que incluye a los números reales y a los números racionales y también se pueden hacer muchas operaciones. Las operaciones normales la suma la multiplicación la división la resta entonces tienen ustedes que dominar cómo se opera con números complejos y también tienen que saber extraer raíces cuadradas y saber que una ecuación de segundo grado puede tener dos raíces que son complejas.

¿Qué aplicaciones pueden tener los números racionales los reales y los complejos? Bueno los números racionales yo creo que todo el mundo se ha encontrado con problemas donde aparecen los números racionales. El problema más clásico es el de dividir una tarta en pedazos. Ahí tenemos números racionales.

En cuanto a los números reales pues es un poco más difícil de ver pero después en la unidad didáctica 5 pues se van a estudiar funciones que están definidas siempre en números reales y funciones continuas funciones derivables todos estos conceptos tanto de continuidad como de derivabilidad y luego los teoremas que realmente se aplican en estos campos pues son los

números reales son necesarios sobre todo un problema de completitud decir que el sistema de numeración no tiene agujeros cierto modo entonces bueno realmente pues un número real en la práctica en un problema de la vida cotidiana pues es difícil que uno tenga que calcularlo con la máxima precisión porque realmente uno se está moviendo siempre con aproximaciones pero temas de física teórica o de física no tan teórica pues los reales están siempre presentes en cuanto a los números complejos pues tienen también muchísimas aplicaciones son quizá más complicadas de decir pero bueno pues se aplican en electromagnetismo y en otras muchas materias con todo en física entonces bueno pues aquí no es el momento yo creo que además en la en el resto de la de los temas pues bueno se puede hablar de espacios vectoriales decididos sobre los complejos pero no va a ser el caso entonces no se van a ver muchas aplicaciones de ellos solamente que los números complejos también dan lugar a que toda ecuación dada por un polinomio pues del tipo  $3x$  a la séptima  $7x$  a la quinta más  $5x$  igual a  $0$  pues tiene soluciones y tiene exactamente tantas soluciones como el grado del polinomio es decir que hay un teorema que se llama el teorema fundamental del álgebra que nos asegura que todo polinomio de grado  $7$  tiene siete raíces que es un teorema de completitud y que realmente es muy importante y además hay que estar siempre moviéndose dentro de los números complejos además los números complejos pues han desempeñado un papel central la variable compleja y la geometría compleja dentro de las matemáticas es decir que desde los tiempos de gauss que realmente pues demostraba muchas cosas utilizando números complejos pues hasta nuestros días y siempre ha sido una herramienta fundamental no solamente en cuanto dentro de los números complejos sino también dentro de los otros campos dentro también de la geometría y de los números reales muchas veces teoremas sobre números reales se demuestran utilizando números complejos y también en cuanto al tema de grupos anillos y cuerpos aunque lo bueno pues son temas muy abstractos y totalmente que uno dice bueno no tienen no pueden tener nada que ver con la realidad tienen grandes aplicaciones el tema de grupos pues aparece desde la estética hasta por ejemplo el problema de saber qué construcciones se pueden hacer con regla y con compás pues esos dos problemas que parecen tan fuera de abstracciones como algebraicas como es una estructura de grupo pues se resuelven utilizando fundamentalmente teoría de grupos o sea que estos temas que parecen abstractos lo parecen pero si tienen muchas aplicaciones muchas aplicaciones y realmente pues todo el curso en realidad de matemáticas especiales pues es el apc de las matemáticas entonces estos temas aparecen continuamente si lo que pasa es que estos temas casi parecen filosofía de la matemática efectivamente en principio parecen muy alejados de la realidad pero no lo son y cómo debe estudiar el alumno estos temas por tanto pues como ya hemos ido diciendo pues el tema de grupos anillos y cuerpos estudia las definiciones y yo diría que nada más en cuanto al de sucesiones de números racionales pues ahí intente leer el concepto de límite bueno recuerde lo que son los números racionales sus operaciones el concepto de límite y después haga ejercicios de cálculo de límite de números racionales donde ocurren indeterminaciones de los tipos más clásicos es decir infinito partido por infinito  $0$  por infinito y después sepa  $0$  infinito menos infinito y sepa lo que tiene que hacer en cada caso son unas operaciones muy sencillas como decíamos antes son mucho más sencillas que captar realmente el concepto de límite en cuanto a lo de los números reales sepa lo que es un número

real un número que tiene infinitas cifras decimales sepa que se pueden hacer las operaciones normales entre los reales y no se meta demasiado en digamos la fundamentación teórica de los números reales y en cuanto a números complejos lo mismo estudie lo que son los números complejos lo que es el número complejo y sepa hacer operaciones también con números complejos y también hacer seguir haciendo operaciones y problemas efectivamente en todos ellos por supuesto el lápiz y el papel son fundamentales y desde luego no hay para aprender a multiplicar números complejos que tomar dos números complejos y ponerse a multiplicarles es decir por tome el  $3 + 5i$  y multiplicado por el  $7 - 2i$  y haga su producto bien ahora ya estamos en diciembre y vamos a tener este mes algunas personas tendrán vacaciones como debe estar a estas alturas del curso el alumno y qué debe hacer en este mes si tiene algo más de tiempo libre bueno pues en principio ya tendrá que haber conseguido leer las dos primeras unidades didácticas haber hecho muchos ejercicios sobre ellas y dominarlas completamente además yo recomendaría que en estas dos primeras unidades didácticas no pierdan demasiado el tiempo en realidad pues son unidades didácticas que contienen mucho material que se supone que debería ser sabido pero bueno pues está bien que les dé la misma importancia que al resto de las unidades didácticas pero si es posible para usted vaya más deprisa sobre ellas entonces claro hay algunas de ellas pues que sí por ejemplo los racionales pues es necesario conocerlos y pero si uno ya sabe bien manejar fracciones pues ahí puede haber pasado muy deprisa entonces ya digo pasen deprisa sobre estas unidades didácticas de estas dos primeras unidades didácticas y vayan a la tercera unidad didáctica donde ya empieza la geometría y que es una unidad didáctica ya más central sobre todo el capítulo o la lección de sistemas de ecuaciones lineales como tenemos un programa en enero en el que hablaremos de esta unidad didáctica 3 sería conveniente que el alumno ya estuviera leyendo la y el puesto que ya vaya estudiándola en la lección de espacios vectoriales pues no se vaya mucho por una abstracción de un espacio vectorial en general sino que vaya tomando como ejemplo el plano real es decir  $\mathbb{R}^2$  al cuadrado o el espacio real que se realcupa bien que siempre con los dos ejemplos en la mano para ir haciendo anotaciones entonces que vaya haciendo problemas que vaya estudiándose y luego las dificultades que puede haber en esta unidad se le explicarán en este programa que tendremos en enero muy bien pues muchas gracias no tiene que ser hasta el próximo programa adiós matemáticas especiales es una asignatura eminentemente práctica y desde este punto de vista el alumno únicamente debe poseer los conocimientos teóricos necesarios para resolver con éxito ejercicios o problemas por supuesto sería ideal que comprendiese todos los argumentos teóricos del texto base pero hay que insistir que en la prueba final sólo hay problemas prácticos en esta línea y a título de ejemplo la parte teórica de combinatoria y probabilidad no es de gran importancia así como la lección 1 de la unidad didáctica 2 grupos anillos y cuerpos donde sólo interesan los conceptos fundamentales el cuerpo de los números reales lección 3 de la unidad didáctica 2 se considera que es un tema que supera la madurez matemática de un alumno de este curso por lo que queda reducido a conseguir una idea de lo que es un número real en resumen las dos primeras unidades didácticas deben ser tratadas con menos énfasis que las cuatro últimas la tercera unidad didáctica la veremos el próximo 16 de enero y despedimos ya el curso de acceso hasta mañana un saludo de isabel baeza y muy buenas noches con el curso de acceso termina la

programación de la unidad en el día de hoy mañana volveremos a nuestra hora habitual ocho y media de la noche siete y media en la comunidad canaria y les acompañaremos durante dos horas y media nuestro primer espacio será revista de derecho continuaremos con el informativo semanal de la uned nuestro último programa será el curso de acceso esta mañana gracias por su atención y feliz descanso