

AC 15 17

Matemáticas especiales, guión número 23, concepto de función, autores Juan Antonio Fernández-Sabater y Félix Ortiz, emisión 24 del 4 del 79. Vamos a empezar esta emisión repasando el concepto de aplicación que ya vimos en un guión anterior, bueno, para ser más exacto, en uno de los primeros. Veamos si alguno de ustedes puede decirme lo que es una aplicación entre conjuntos.

Bueno, una aplicación entre conjuntos es un caso particular de correspondencia entre conjuntos en el cual a cada elemento del primer conjunto le corresponde un solo elemento del segundo conjunto. Sí, me acuerdo que el concepto de correspondencia entre conjuntos era más amplio que la aplicación. Efectivamente.

Una correspondencia entre dos conjuntos es un subconjunto cualquiera del producto cartesiano de esos dos conjuntos, sin imponer ninguna condición restrictiva. Sin embargo, una aplicación es también un subconjunto del producto cartesiano, pero con ciertas condiciones. Lo que está claro es que en ambos casos, al ser subconjunto del producto cartesiano, lo que nos define la aplicación o la correspondencia es una serie de pares ordenados de elementos.

Entonces, las condiciones que debe cumplir una correspondencia para ser aplicación es que todo elemento del primer conjunto tenga imagen en el segundo y que esta imagen sea única, ¿no es así? Exacto. Estas son las dos condiciones que hacen que una correspondencia sea aplicación. Podemos recordar también que si tenemos una aplicación entre dos conjuntos, A y B , llamaremos al primero de ellos conjunto original o de partida, y al segundo conjunto final o de llegada.

Llamaremos asimismo conjunto imagen al subconjunto del conjunto de llegada, formado por los elementos que son imagen de algún elemento del conjunto de partida. Veamos ahora si recuerdan los tipos de aplicaciones más importantes. Bueno, yo me acuerdo de las inyectivas y suprayectivas.

Sí, pero ¿cuáles son las características que definen estos dos tipos de aplicación? En la aplicación inyectiva, las imágenes de elementos distintos tienen que ser distintas. En la suprayectiva, la característica que la define es que todo elemento del segundo conjunto es imagen de algún elemento del primer conjunto. Entonces, en el caso de aplicación suprayectiva, el conjunto imagen es idéntico al conjunto de llegada.

Pero ¿cómo se llama la aplicación que es a la vez inyectiva y suprayectiva? Pues le llamamos aplicación biyectiva. Hasta ahora no hemos puesto ninguna restricción a los conjuntos entre los que establecemos las aplicaciones. Supongamos ahora que los elementos de esos dos conjuntos son números, es decir, conjuntos numéricos.

Estos conjuntos numéricos pueden ser de cualquiera de los tipos que ya hemos visto, es decir, números naturales, enteros, racionales o reales. Pues bien, a este tipo de aplicaciones entre

conjuntos de números las llamaremos funciones. ¿Cuál podría ser entonces un conjunto de partida para estas aplicaciones? Según lo que he dicho antes, usted misma puede poner un ejemplo.

¿Valdría, no sé, ¿valdría, por ejemplo, el conjunto formado por los elementos raíz de 5, 2 y 10 tercios? Exactamente. Este o cualquier otro conjunto de números. Una función definida sobre este conjunto origen será toda aplicación definida sobre este conjunto con imagen en otro conjunto de números.

Antes de continuar en la introducción de las funciones del análisis matemático, vamos a estudiar los conceptos de variable y constante. En la naturaleza, al estudiar diversos fenómenos, surgen dos tipos de valores. Por ejemplo, la velocidad de un cuerpo que cae a partir del reposo depende del instante en que la miramos.

Es decir, es una cantidad que varía con el tiempo, o sea, es una magnitud variable con el tiempo. Consideramos ahora otro ejemplo. Supongamos un gas contenido en un recipiente y comprimido con un émbolo.

Al extraer hacia afuera el émbolo, el volumen del recipiente aumenta y disminuye la presión. Es decir, que al aumentar el volumen, disminuye la presión. Luego la presión es una magnitud variable con el volumen.

¿Se les ocurre a ustedes algún ejemplo más de magnitud variable? Creo que es fácil. Por ejemplo, al girar el mando de volumen de un tocadiscos, varía las sonoridades de tocadiscos. Es decir, el volumen varía, o sea, es una magnitud variable con el giro del mando.

Pasemos ahora a estudiar el concepto de constante mediante ejemplos cotidianos. Supongamos, por ejemplo, un tren que se va moviendo con una velocidad que no varía con el tiempo. En este caso, a lo largo del tiempo, el espacio recorrido por el tren es una magnitud variable, ya que en instantes diferentes la posición del tren es distinta.

Sin embargo, la velocidad es una magnitud constante, ya que, según dijimos al principio, no varía con el tiempo. ¿Se les ocurre algún otro ejemplo de magnitud constante? Sí, sí. En el ejemplo que puso usted de la caída de un cuerpo, debido a la aceleración de la gravedad, ésta es constante en todo momento.

Entonces, en cualquier proceso, vemos que pueden existir dos tipos de magnitudes al compararlos con otras. Unas que son variables y otras que son constantes. Veamos ahora lo que son variables independientes y variables dependientes.

Volvamos al ejemplo del tren que se mueve con velocidad constante. Se habrán dado ustedes cuenta que hay dos magnitudes variables. Una es el espacio recorrido por el tren y la otra es el tiempo que tarda en recorrer dicho espacio.

En diferentes instantes de tiempo, la posición es distinta. Suponiendo que el tren sale a una

hora de una estación, a partir de ese momento, el espacio recorrido por el tren dependerá del tiempo transcurrido. Diremos que el espacio es una variable dependiente del tiempo, mientras que del tiempo diremos que es una variable independiente.

Ahora vamos a ver cómo relacionamos estas últimas ideas con el concepto de función que dimos al comienzo de la emisión. ¿Recuerdan ustedes cuáles? Una función es una aplicación en la cual tanto el conjunto de partida como el de llegada son conjuntos numéricos. En efecto, al decir antes que el espacio recorrido por el tren dependía del tiempo, lo que hacemos es establecer una aplicación entre el conjunto de los tiempos y el conjunto de los espacios recorridos.

Es decir, a cada instante del conjunto de tiempos le asociamos una posición del tren. Como el conjunto de partida y el de llegada son conjuntos numéricos, tenemos establecida una función que relaciona el espacio recorrido con el tiempo transcurrido. Entonces diremos que el espacio es función del tiempo.

En el ejemplo que pusimos del gas comprimido por el émbolo, diremos que la presión es una función del volumen, pues la presión varía con el volumen. Entonces, en este ejemplo, la variable independiente sería el volumen y la dependiente la presión, ¿no es así? Exactamente. Para decir con pocas palabras lo que es una función, podemos enunciar lo siguiente.

Llamaremos función a la ley matemática que asigna valores únicos de las variables dependientes, el espacio o la presión en los ejemplos anteriores, a valores dados de las variables independientes, el tiempo o el volumen. Habitualmente la variable independiente se designa con la letra x y la variable dependiente con la letra y . La función f que relaciona y con x se expresará y igual a f de x . ¿Pero qué quiere decir exactamente la expresión y igual a f de x ? Como es una igualdad, f de x e y expresan lo mismo, la imagen mediante la función f de un valor x cualquiera del conjunto de partida. En la llamada forma analítica, para escribir una función, esta f de x será una expresión matemática en la que de alguna forma interviene la x que toma distintos valores en el conjunto de partida.

Para cualquiera de estos valores, la ley matemática que define la función va a dar un único valor de y . ¿Podría darnos algún ejemplo de función en su forma analítica? Bien, por ejemplo, la función y igual a $2x$. Para cualquier valor real de x , y toma otro valor real. Así, si x vale 3, y vale 6. Otro ejemplo podría ser y igual a 1 partido por x . ¿Cuál sería la imagen para esta función de los números 2 y raíz de 3? Para x igual a 2, la y sería 1 partido por 2, o sea, un medio.

Cuando x vale raíz de 3, y sería 1 partido por raíz de 3. Bien. ¿Cuál sería la imagen del 0 para esta función? Pues sería 1 partido por 0, pero esto no tiene sentido. En efecto, en efecto.

Esto nos va a permitir definir el dominio de una función. Llamaremos dominio de una función al conjunto de valores de x , para los cuales la función tiene un sentido preciso. Este conjunto es el que tomamos como conjunto de partida de la función.

Por ejemplo, en el caso anterior, la función está definida del conjunto de los números reales menos el 0 en el conjunto de los números reales. Podríamos haber definido otra función de la misma forma analítica, con la restricción de que la imagen sea un número racional. De esta forma, el dominio de la función cambiaría.

No sólo habría que quitar el 0, sino también todos los números irracionales. ¿Y podría darnos algún ejemplo más de funciones? Claro, claro, por supuesto. Cualquier expresión algebraica de x igualada a y . Por ejemplo, y igual a $8x$ cuadrado menos raíz de $2x$ más 1. El dominio de esta función serán todos los valores de x menos los que tengan el radicando negativo.

Otro tipo de función que ya veremos más adelante y que no son algebraicas serán, por ejemplo, los del tipo y igual a seno de x . y igual a logaritmo de x . Así como combinaciones formadas con estos tipos de funciones.