

... Matemáticas básicas, ley de composición interna número 14. ... Como la mayoría de nuestros alumnos recordarán, en emisiones anteriores hemos intentado familiarizarnos con la idea de conjunto-producto o producto cartesiano de dos conjuntos. Vamos a tratar en esta emisión radiofónica las leyes de composición interna. Empezaremos recordando lo visto el día anterior. ¿Qué entendemos por conjunto-producto o producto cartesiano de dos conjuntos? Señorita. Dados dos conjuntos, llamamos...

conjunto-producto a otro conjunto cuyos elementos son pares ordenados de elementos obtenidos a partir de los dos conjuntos de partida. De acuerdo, pero usted por favor, ¿cómo se obtienen estos pares ordenados? Podemos decir que un par ordenado es una pareja de elementos dados en cierto orden, de manera que la primera componente de esta pareja es un elemento del primer conjunto, mientras que la segunda componente es un elemento del segundo conjunto. Perfectamente claro. Vamos ahora a descender al detalle recurriendo a un ejemplo. Supongamos que dos muchachas y tres muchachos organizan un baile. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar? Imaginemos para mayor facilidad que las chicas son Luisa y Antonia y que los muchachos son Luis y Antonio. ¿Cuántas parejas se pueden formar? ¿Cuántas parejas se pueden formar? Pedro, Manuel y Andrés.

Entonces, los dos conjuntos son el conjunto formado por todas las muchachas, cuyos elementos son Luisa y Antonia, y el segundo conjunto, el de los muchachos, cuyos elementos son Pedro, Manuel y Andrés. O sea, el primer conjunto tiene dos elementos y el segundo conjunto tiene tres. Exacto. Queremos, en consecuencia, formar el conjunto producto de las muchachas por los muchachos. Es, por tanto, el producto de un conjunto que tiene dos elementos por otro conjunto que tiene tres elementos. Pero, insisto, ¿cuáles son sus elementos? Tenemos que formar todos los pares ordenados de acuerdo con los requisitos que acabamos de decir. Vayamos por parejas. Estas parejas son Luisa y Pedro, Luisa y Manuel.

Luisa y Andrés. Estas tres son todas las parejas, todos los pares ordenados en los que interviene Luisa. Exactamente, solo Luisa. Ahora consideramos todas las parejas en que interviene Antonia, que son Antonia y Pedro, Antonia y Manuel, Antonia y Andrés. Muy bien, hemos obtenido seis parejas. Además me parece estupendo el procedimiento que ha utilizado usted para formar los pares ordenados. Es difícil equivocarse si se hace de esa manera. Se toma el primer elemento del primer conjunto y se combina con todos los elementos del segundo conjunto. Después se coge el siguiente elemento del primer conjunto y se hace lo mismo. Este proceso se repite hasta agotar todos los elementos del primer conjunto. Quiero hacer una oferta. Observación. Vayamos ahí. En el caso que estamos considerando, el primer conjunto...

Es decir, el conjunto formado por las chicas tiene dos elementos, mientras que el conjunto formado por los chicos tiene tres elementos. El conjunto producto de estos dos tiene seis elementos, está formado por seis pares ordenados y seis es precisamente el resultado de multiplicar dos por tres. ¿Es esto general? Efectivamente, este resultado es general. El número de elementos del conjunto producto o producto cartesiano de dos conjuntos se obtiene multiplicando entre sí el número de elementos de los conjuntos de partida. Profesor, yo también quiero hacer una pregunta. Vayamos a ello. Siempre hemos calculado el producto cartesiano o conjunto producto de dos conjuntos distintos. Sí. ¿Podemos averiguar este producto en el caso de que los dos conjuntos... ...sean iguales? De esto quería yo...

precisamente tratar ahora. Mi contestación también es afirmativa en este caso. Si recordamos la definición dada en la emisión anterior y repetida al comenzar la emisión de hoy, no existe a este respecto ninguna restricción. Como consecuencia, se puede calcular el conjunto producto de un conjunto por sí mismo. Pues bien, si esta idea está clara, podemos tratar de las leyes de composición interna. Yo creo que sí. Por mi parte, podemos seguir. Sí, yo también estoy de acuerdo con mi compañera, así que adelante. Bueno, si recordamos todo lo estudiado hasta ahora, observarán que en diversas ocasiones nos hemos referido a los conjuntos como simples agrupaciones de elementos, sin pensar que estos elementos pueden estar dispuestos dentro del conjunto de acuerdo con cierta organización interna. Pero esto no es general. En ocasiones determinadas, podemos

podemos introducir dentro del conjunto una organización interna, una organización que solamente afecte a los elementos del conjunto. Cuando esto sucede, decimos que dotamos de una estructura al conjunto. Esto que usted apunta ya lo hemos visto. Por ejemplo, si recordamos las relaciones de orden, podía afectar a todos los elementos de cierta manera. Podemos decir que ordenamos los elementos del conjunto sobre el que se define una relación de orden. Sí, yo también pienso así. No sé cómo decirlo, pero considerar la relación de orden definida en un conjunto es lo mismo que pensar que los elementos de este conjunto no están simplemente amontonados. ¿Qué es la relación de orden? Vamos a seguir un procedimiento semejante al apuntado por usted.

ustedes. Tratamos de estudiar unas estructuras especiales llamadas algebraicas, resultado de definir entre los elementos de un conjunto una ley de composición interna o una operación que, en definitiva, es un tipo particular de relaciones. Estamos deseosos de saber qué es una ley de composición interna. De acuerdo. Dado un conjunto, diremos que entre los elementos se ha definido una ley de composición interna cuando a cada pareja de elementos de este conjunto le asociamos otro elemento de este conjunto. Repito. Por medio de una ley de composición interna, asocio, según un criterio cualquiera, arbitrariamente a cada dos elementos de un conjunto, un elemento que también pertenece al conjunto. Entiendo que... ...casi todo lo que...

Acaba de decir menos una cosa, profesor. ¿Cuál? Usted ha dicho que a cada pareja de elementos le asocia arbitrariamente otro elemento de este conjunto. Sí. ¿Qué quiere decir arbitrariamente? Decir que esta asociación es arbitraria significa que no exige ningún requisito especial. Entonces, sobre un mismo conjunto, se pueden establecer varias leyes de composición interna según el criterio que imponamos. Así es. Además, esta situación no debe ser nueva para nuestros alumnos. En más de una ocasión nos hemos encontrado en situaciones semejantes. Basta recordar las relaciones binarias definidas sobre un conjunto y las correspondencias entre dos conjuntos, por ejemplo. ¿Sería estupendo poner un ejemplo para terminar de comprenderlo bien? Bueno, pues vamos allá. Si les parece, vamos a recurrir a un ejemplo muy utilizado por ustedes.

Entonces, pensemos en la suma de números naturales. ¿Saben ustedes sumar números naturales? Por supuesto que sí. Muy bien. Fíjense en el planteamiento que hacemos. Consideramos el conjunto de los números naturales que, como todos sabemos, está formado por los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. ¿Qué hacemos cuando sumamos dos números naturales? Asociamos a cada dos números naturales otro número que también es natural. Así decimos. 2 más 3 es igual a 5. Los números 2, 3 y 5 son números naturales. Observen que este procedimiento permite asociar a

cada dos números naturales otro número.

Entonces, la suma de números naturales es una ley de composición interna definida en el conjunto de los números naturales. Exacto, pero tengan presente que hemos dicho que es una ley de composición interna. No hemos dicho que es la única ley de composición interna. Esto significa, me imagino, que sobre este conjunto se pueden definir otras leyes de composición interna. Yo en estos momentos pienso que la multiplicación es una ley de composición interna. Podemos decir, por ejemplo, 2 por 3 igual a 6. 2, 3 y 6 son números naturales. Intencionalmente, hemos dejado de destacar un aspecto de la multiplicación interna. Un aspecto fundamental preocupado.

por la forma. Quiero que quede clara una cosa. Cuando definimos una ley de composición interna sobre un conjunto, tenemos que asociar a toda pareja de elementos del conjunto otro elemento que también pertenece al conjunto. O sea, como todas las posibles parejas o pares ordenados del conjunto sobre el que queramos definir la ley de composición interna, se obtienen, calculando el conjunto producto de este conjunto por sí mismo, ¿podemos utilizar esta terminología? No solamente se puede, sino que se debe, es la más exacta. Por eso, decir que una ley de composición interna sea definido sobre un conjunto es equivalente a decir que se ha establecido una aplicación entre los elementos de conjunto producto de este conjunto por sí mismo y dicho conjunto. Al afirmar que es una aplicación entre los pares ordenados que forman el conjunto producto y los elementos del conjunto,

Entiendo, profesor, que a cada pareja de elementos tenemos que asociar otro elemento del conjunto. ¿Es así? Creo que este es un aspecto fundamental. Hasta tal extremo que si no ocurre así, no se puede hablar de una auténtica ley de composición interna. Efectivamente. Este requisito es fundamental. Siempre hay que tenerlo presente cuando se define una ley de composición interna. A mí me parece que la definición de conjunto productivo... ¿Con conjunto se puede considerar como una ley de composición interna? Rotundamente no. ¿Ah, no? No, no, no. Recordemos que una ley de composición interna hace corresponder a cada pareja de elementos...

otro elemento que pertenece al conjunto. Esta circunstancia no se da en el caso del conjunto producto. Sí, ya entiendo. El conjunto producto es un procedimiento por medio del cual averiguamos pares ordenados. Averiguamos pares ordenados que no son elementos del conjunto de partida. Son elementos del conjunto producto. Además, en este caso, contrariamente a lo que ocurre con una ley de composición interna, no establecemos ninguna aplicación, no hacemos corresponder a estos pares ningún elemento. Gracias por ver el video.