

AC 10 104

Hola, buenas noches, bienvenidos a nuestro programa El Tiempo del Curso de Acceso Directo a la Universidad para Mayores de 25 años, el CAT. Esta noche en nuestro espacio Matemáticas Básicas, nos acompaña el profesor Eduardo Ramos, con él hablaremos de las lecciones 8 y 9, la lógica de las proposiciones y combinatoria. Esta noche en nuestro programa de Matemáticas Básicas, nos acompaña el profesor Eduardo Ramos.

Muy buenas noches. Muy buenas noches. Vamos a hablar de las lecciones 8 y 9, la lógica de proposiciones y combinatoria.

Hay oraciones que anuncian algo siempre, siempre cierto, o al menos se aceptan como tales. Otras son siempre falsas y otras terceras son a veces verdaderas y a veces falsas. Este capítulo nos habla de proposiciones, pero ¿a qué se llaman proposiciones o enunciados? Sí, el lenguaje corriente, el lenguaje ordinario que empleamos en la conversación cotidiana es muy rico, es muy complejo y está lleno de matices, de frases que expresan diferentes situaciones, estado de ánimo, deseos, o simplemente afirman o niegan una cosa.

Por ejemplo, utilizamos frases como cuidado con el perro, utilizamos frases más simples como todos los hombres son mortales, etc. De unas frases, como esta que acabo de citar, cuidado con el perro, no se puede decidir si es verdad o falsa, si es verdadera o falsa. En cambio, hay otras frases, como todos los hombres son mortales, otras oraciones, otras expresiones, de las cuales siempre es posible decidir si son verdad o si son mentira.

Este tipo de oraciones, de las cuales se puede asegurar en cualquier caso que son verdaderas o que son falsas, son las que llamamos en la lógica matemática proposiciones o enunciados. De las otras frases, de toda la riqueza del lenguaje, se ocupa la lengua, y de esas frases que son declarativas, que enuncian algo, de lo cual se puede decidir si es verdad o falso, son de las que se ocupan las matemáticas. ¿Y cómo se pueden combinar proposiciones para obtener otras más complejas? Sí, bueno, hay frases que son simples, como esa que acabo de decir, todos los hombres son mortales.

Hay otras frases que son más complicadas, que son un poco más largas, que combinan frases simples o oraciones simples, enunciados simples. ¿Cómo son? Yo tengo tres ases y usted tiene dos ases. Bueno, este segundo tipo de frases las llamamos compuestas por oposición a las frases del primer tipo que llamábamos simples.

Lo que nos interesará en todo momento es andar discutiendo acerca de si estas frases que manejamos, estas oraciones, estos enunciados o proposiciones, son verdaderos o son falsos. ¿Pero cuáles son los problemas propiamente matemáticos? Eso es. Es decir, ya acabo de decir que la lengua se ocupa de otras cosas que no tienen que ver con esta lección, otros aspectos de las oraciones que no tienen que ver con estos aspectos que nos interesan en matemáticas y que nos interesan más en concreto en la lógica matemática.

De estos temas se han ocupado a lo largo de la historia en muchas ocasiones los hombres, los lógicos griegos, la escolástica y, más recientemente, algún matemático importante como el matemático Bull, un matemático inglés del siglo pasado, se ocuparon de estudiar estas cosas desde un punto de vista formal, desde un punto de vista estructural, desde un punto de vista matemático. Esencialmente nos ocupamos en esta lección, o se ocupa la lógica matemática, de dos aspectos. El primero de ellos es de qué manera es posible construir frases complejas o compuestas a partir de frases simples o de enunciados simples, es decir, el modo de hacer enunciados compuestos con una estructura lógica.

Y en un segundo aspecto es aquel de decidir si estas frases que enunciamos son complejas o compuestas son verdaderas o son falsas a partir de los valores de verdad que tengan las frases simples o los enunciados simples que las forman. Como decíamos hace un minuto que las frases que manejamos en este apartado de la lógica matemática son aquellas que se pueden siempre decidir si son verdaderas o si son falsas, entonces según esos valores o según su valor de verdad, que así se llama, tendremos que discutir si una frase compuesta, construida a partir de frases más elementales, de frases simples, es a su vez verdadera o falsa. Esto nos permitirá, de alguna manera, atajar en el modo de razonar y poder descomponer las cosas, descomponer los razonamientos complejos en cosas que podamos ver más simplemente si son verdaderas o si son mentiras.

En definitiva es uno de los aspectos capitales de las matemáticas, de la aportación de las matemáticas al modo de razonar de los humanos. Aquello de ayudarles un poco a disecar, a extraer lo más enunciados simples para, de lo más simples posible, sobre los cuales podamos ver fácilmente su valor de verdad y a partir de ellos construir el valor de verdad de enunciados compuestos. Hay proposiciones que enuncian varias cualidades de un ser o una cosa, pero los enunciados simples pueden relacionarse entre sí modificando el sentido del enunciado.

¿Se podría poner algún ejemplo para verlo más claro? Eso es, eso es. En esto estamos, es repetir un poco lo que estábamos diciendo y como muy bien apuntas, lo más inteligente es ilustrarlo con un ejemplo sencillo. Una frase simple, la lógica es fácil.

Un enunciado simple, la lógica es fácil. Otro enunciado simple, la lógica es divertida. Y con estos dos enunciados simples podemos formar un enunciado compuesto utilizando una partícula que va a ser la conjunción copulativa y que podemos decir entonces que la lógica es fácil y divertida.

Esta es una frase un poco más compleja que la anterior y nos ilustra muy bien cómo es la mecánica que hace la lógica con los enunciados y con las oraciones. Otro ejemplo del mismo estilo, pero con otra partícula que hila, frases simples, puede ser el ejemplo siguiente. Una frase enunciativa es, yo voy al pueblo.

Otra frase enunciativa es, yo labraré el campo. Y una frase que es compuesta de las dos con unas partículas que es un sí condicional podría ser la siguiente. Si voy al pueblo, entonces labraré el campo.

Entonces, esta es una frase más larga, más compleja, que está formada por dos frases simples con una partícula o dos partículas del estilo sí, entonces, como vemos en este ejemplo, que une las frases simples y la convierte en una frase compleja, una frase compuesta. ¿Estos serían conectores? Eso es el nombre técnico que utiliza la lógica para diseñar de una manera, perdón, designar de una manera global estas partículas como la I copulativa, el sí, entonces, se denominan de modo genérico conectores. ¿Cuáles serían los conectores más comunes? La manera más sencilla de construir, o sea, casi todas las frases compuestas se van a poder construir a base de unos pocos conectores elementales, que son, como casi siempre en matemáticas, lo más simple, lo más sencillo y lo más intuitivo, por otra parte.

Entonces, creo que conviene perder dos minutos en repasar estos conectores y cómo están pensados y cómo se puede trabajar con ellos. Entonces, los tres conectores principales, los tres partículas elementales, las partículas simples, que combinan frases simples y las convierte en compuestas, son la negación, la conjunción y la disyunción. La negación es de una proposición P, es otra proposición que es contraria a la P y niega lo que dice la proposición P. Pongamos un ejemplo del estilo que decíamos antes.

Por ejemplo, si la proposición P es, la lógica es divertida, entonces la negación de la proposición P, dicho de manera simbólica, la proposición no P, es negar eso que estábamos afirmando de la lógica, que era divertida. Es decir, sería la afirmación, la lógica no es divertida. Claro, eso se puede decir de muchas maneras.

Hay otras maneras de negar una proposición. Por ejemplo, se puede decir, es falso que la lógica sea divertida. Eso, en el lenguaje corriente, significa lo mismo que decir, la lógica no es divertida.

También se puede decir, no es cierto que la lógica es divertida. Eso exactamente, en el lenguaje corriente, significa que la lógica no es divertida. Es decir, la partícula, el término, la palabra castellana que se emplea para hacer la negación de una proposición, puede tener diferentes caras, diferentes presentaciones o diferentes aspectos.

Pero, esencialmente, significa la misma cosa. Bueno, entonces, ¿cómo se maneja, cómo se trabaja con proposiciones y sus negaciones? O, a partir de las proposiciones simples, ¿cómo se estudian las proposiciones compuestas? Eso se hace en base a lo que se llama la tabla de verdad de una proposición. La tabla de verdad de una proposición es un conjunto de letras o de símbolos que significan, en un caso, que la proposición es verdadera o que es falsa.

Por ejemplo, una proposición P puede ser, pues tiene dos valores, que es la lógica que utilizamos en matemática, la lógica de dos valores. O puede ser verdadera o puede ser falsa. Y, entonces, la proposición negación de P, la proposición no P, tiene estos valores de verdad alternativos a los valores de P. Es decir, si P es verdadera, la proposición no P es falsa.

Y, si P es falsa, la proposición no P es verdadera. Entonces, en resumen, tenemos que, del conector, negación. Conocer qué significa la negación de una proposición.

Y, segundo, cómo se construye su tabla de verdad a partir de la tabla de verdad de la proposición original. ¿Y la conjunción? Bueno, en esta misma línea podemos ya manejar otro conector, que es la conjunción. La conjunción de dos proposiciones P y Q está formada por una proposición que introduce, se mezclan las dos proposiciones simples que la forman utilizando la partícula Y. Por ejemplo, proposición P, el mar está en calma.

Proposición Q, sopla una ligera brisa. Entonces, la conjunción de esas dos proposiciones es una frase que diría esto, que dice esto, el mar está en calma y sopla una ligera brisa. Pasan las dos cosas.

Entonces, el valor de verdad de la proposición compuesta conjunción, que he dicho en términos simbólicos P y Q, que así se simboliza, es la siguiente. Es una proposición que es cierta cuando las dos proposiciones que la forman son ciertas. Y es falsa en todos los demás casos.

Es decir, cuando alguna de las proposiciones que la forman son falsas, o cuando las dos son falsas, entonces la proposición conjunción P y Q es también falsa. Es decir, si el mar está en calma y sopla una ligera brisa, entonces es cierto que el mar está en calma y sopla una ligera brisa. Pero si o bien el mar no está en calma, o bien no sopla la brisa, o bien no pasan de ninguna de las dos cosas, entonces no es cierto que el mar está en calma y sopla una ligera brisa.

Y por último, podemos hablar de la disyunción. El tercer conector que manejamos de manera general es la disyunción. La disyunción es una proposición que une las proposiciones simples que la forman mediante el empleo de la conjunción disyuntiva O. Entonces, por ejemplo, tenemos la proposición P. Yo tengo un lápiz.

La proposición Q. Yo tengo una pluma. Entonces, la proposición disyunción de las dos, P o Q, es la proposición yo tengo un lápiz o tengo una pluma. El valor de verdad de esta proposición compuesta disyunción, que se simboliza P o Q, se representa con un símbolo que es P o Q, es el siguiente.

Si alguna de las dos proposiciones es cierta, entonces la proposición disyunción es cierta. Mientras que si alguna de las dos proposiciones son falsas, o ambas son falsas, entonces, perdón, mientras que si las dos proposiciones son falsas, entonces la proposición disyunción es falsa. Repito, el valor de verdad de la proposición P o Q es cierto cuando alguna de las dos es cierta y falsa sólo en el caso de que las dos a su vez sean falsas.

Es decir, si yo digo yo tengo un lápiz o tengo una pluma, si tengo un lápiz, es cierto que tengo un lápiz o una pluma. Si tengo una pluma, es cierto que tengo un lápiz o tengo una pluma. Y si tengo un lápiz y una pluma, si tengo las dos cosas, es cierto que tengo un lápiz o una pluma.

Mientras que si no tengo lápiz ni tengo pluma, entonces no es cierto que tengo un lápiz o una pluma. Con esto acabaríamos los conectores y estamos hablando de las tablas de verdad. ¿Hay algo más que decir? Bueno, aquí lo que se trata en esto del estudio, como decíamos antes, de

los problemas matemáticos que manejamos en esta lección, que es determinar, uno de los problemas, el problema importante en este apartado de la lógica es determinar el valor de verdad de un enunciado compuesto a partir de los valores de verdad de los enunciados simples.

Y eso es tradicional simbolizarlo en lo que se llama, una vez más, la tabla de verdad. Entonces, con estos conectores simples y o no, se pueden hacer mezclas y repeticiones y enunciados cada vez más complejos. Que también por convenio y para entender la escritura y entender lo que se está diciendo, se suelen ir acomodando entre paréntesis.

De forma que cada paréntesis, o sea, cuanto más interno es, primero hay que calcular ese paréntesis. Y luego, mediante estas técnicas que he repetido, o sea, que he dicho ahora de cómo se construye las tablas de verdad de una proposición compuesta del tipo y, del tipo o, del tipo no, a base de los valores de verdad de sus proposiciones. De esta forma, se puede ir construyendo las tablas de verdad de proposiciones cada vez más complejas, de una manera rutinaria, de una manera cambiando, diciendo, por ejemplo, si v y v, entonces v, v y f, entonces f, y así sucesivamente.

Y esto nos permite, precisamente, cumplir ese objetivo que señalamos al principio de esta lección. Que podemos decidir si una proposición arbitrariamente larga, conformada por varias proposiciones elementales, es cierta, si, o según lo sean, ciertas o falsas, las proposiciones elementales que lo forman. Y digamos que esto es la riqueza que tiene esta lección.

Nos permite decidir, o esta técnica, nos permite decidir si algún tipo de enunciado que hacemos, más o menos largo, extenso y complejo, es válido a base de irlo diseccionando, de irle extrayendo las proposiciones más elementales que lo forman. Y para acabar ya esta lección, ¿qué son los razonamientos lógicamente válidos? Sí, esto es quizás la esencia de la ciencia en general. Es decir, un razonamiento es válido, es un válido.

Bueno, primero voy a decir qué es un razonamiento. Un razonamiento es afirmar que cierta proposición se sigue, que se llama conclusión, cierta proposición que llamamos la conclusión, las tesis, la tesis del razonamiento, lo que queremos demostrar, se sigue lógicamente, de una manera válida, mediante una cadena lógica, de unas proposiciones que llamamos premisas, o que llamamos hipótesis. Es decir, eso es un razonamiento.

Y un razonamiento es lógicamente válido cuando las premisas son ciertas, cuando la conclusión es a su vez cierta. Entonces, es una de las actividades, seguramente, del ser racional de mayor altura. Es si afirmamos que esta enunciado es cierta, que esta otra cosa sostenemos que es cierta.

Si aquella frase de más allá es cierta, entonces, utilizando unas técnicas de razonamiento que están comentadas también y preparadas en esta lección, podemos sacar de ella una determinada conclusión. Esto a mí me parece muy importante que los estudiantes se fijen detenidamente en ello, porque es quizás una de las señas de identidad del hombre culto, del

hombre universitario. Cuando alguien sabe razonar de manera lógicamente válida y no razona como si dijéramos un extraterrestre.

Es decir, aunque no exigimos para el examen algunos de los modos de razonamiento válidos de las reglas de inferencia, como el modo ponendopones, el modo estolendotones, en fin, los modos clásicos de construcción de razonamiento lógicamente válidos, sí me gustaría recalcar que es muy útil que los estudiantes estudien por su cuenta y con cierto detenimiento cómo son estas cosas, porque les serán muy útiles para su formación universitaria. Sí, porque esta lección, desde fuera desde luego, pero me da la impresión de que es una mezcla entre matemáticas, lenguaje y filosofía. Eso es.

Es algo muy complejo. Efectivamente, la lógica es donde se aunan una serie de disciplinas que las a veces rígidas estructuras académicas se han ido apartando y compartimentando, pero efectivamente la lógica, que es una de las actividades, como acabo de decir, más importantes de ser racional, pues está contemplada y estudiada y analizada por los que se llaman filósofos, por los que se llaman lingüistas, por los que se llaman psicólogos incluso, y por los que nos llamamos matemáticos. Sí, a mí me resulta una lección especialmente bonita.

Es muy interesante. Y vamos a pasar a la siguiente, que nos habla de combinatoria. ¿De qué trata? Venga, el tiempo nos obliga a dejar ahora un momentín la lógica por este programa y por este curso y pasar efectivamente a hacer algunas notas, algunas recomendaciones para los alumnos relativas a la lección de combinatoria.

En dos palabras muy breves podemos decir que la combinatoria, la lección de combinatoria estudia el problema de contar. El problema de contar cuántos elementos tiene un conjunto. Es el arte de contar casi, si me permites.

O sea, es toda una habilidad saber contar de manera inteligente. Hay un ejemplo que siempre pongo por esta lección que es muy familiar con todo el mundo. Todo el mundo sabe contar conjuntos con relativamente pocos elementos.

Por ejemplo, si te dicen cuántas provincias tiene Andalucía, pues todo el mundo cuenta ocho provincias enseguida. Porque ocho elementos somos capaces hasta de contarlos con movimientos de la mano. Pero, sin embargo, si le preguntamos a alguien cuántas quinielas puede formarse o cuántas posibilidades tiene la lotería primitiva o cuántos boletos de lotería primitiva habría que rellenar para estar seguro de acertar, ahí ya tenemos un poquito más de dificultad porque ya intuimos que hay muchos y que hay que pensar, o sea, que esa técnica de numerarlos todos va a fracasar inmediatamente porque no tendremos tiempo, ni papel, ni seguramente vida para acabar de numerar conjuntos cuando tienen un número muy elevado de elementos.

Pero, sin embargo, no por ello hay que renunciar a saber cuántos elementos tiene. No porque tenga muchos elementos decimos esto no podemos averiguar cuántos elementos tiene, sino que efectivamente lo que tenemos es que discurrir para poder encontrar el atajo que nos

permita decidir de una manera fácil o inteligente cuántos elementos tiene un conjunto cuando prevemos que el número de elementos van a ser muchos. Y eso es esencialmente la combinatoria.

Unas cuantas reglas, también por otra parte bastante simples, que nos permiten contar el número de elementos que tiene un conjunto sin hacer enumeraciones exhaustivas. Es decir, usando la cabeza, usando la inteligencia en lugar de usar los dedos de la mano. Bien, ¿y cuáles son los métodos principales? Bueno, hay muchos métodos, lógicamente.

Y, por cierto, debo decir también que estos temas de contar desde el momento en que los ordenadores permiten tantas posibilidades y que son tan rápidos y se pueden contemplar problemas con el examen de conjuntos que era insueñable hace unos años. Entonces, digo que hay varios métodos para contar y en esta lección estudiamos dos métodos, digamos, generales y luego los aplicamos o los especializamos a tres modelos más clásicos, más conocidos, más típicos y más tradicionales en esta lección de combinatoria. El primer método para contar se puede enunciar de una manera simple.

Para hallar el cardinal de un conjunto, que es esencialmente lo que es contar, hay que averiguar la manera de establecer una aplicación billettiva entre sus elementos y los elementos del conjunto formado por los n primeros números naturales, es decir, por el conjunto $1, 2, 3, 4, 5, \text{etc.}, n$. Entonces, si somos tan inteligentes o tan hábiles de saber encontrar una correspondencia billettiva, recordemos lo que es una correspondencia billettiva de la lección pasada, es una correspondencia que a cada elemento del primer conjunto hace corresponder uno sólo del conjunto y recíprocamente, es decir, están en correspondencia uno a uno, bi, uni, oca. Entonces, si somos tan hábiles de saber encontrar esa correspondencia billettiva entre el conjunto que queremos contar y el conjunto de números naturales $1, 2, \text{etc.}, n$, ya sabemos que ese conjunto que queremos contar tiene n elementos. Esto se puede generalizar un poco de la siguiente manera.

Si m y n son dos números naturales, m es más pequeño que n , entonces una pregunta o una cuestión que se nos puede plantear con bastante frecuencia es cuántos números naturales hay entre... Bueno, dije números naturales, pero es igualmente válido para números enteros. Es decir, si m y n son dos números enteros, la cuestión que se nos puede plantear es cuántos números enteros hay entre m y n . Y entonces la respuesta, con un poco de razonamiento, es bastante sencilla. Es n menos m más 1 . O sea, el más grande menos el más pequeño y luego hay que sumarlo en 1 para cogerlos a todos.

Entonces, con esa pequeña regla, ese primer método de contar, que en definitiva responde a ese concepto matemático de establecer una correspondencia biyectiva entre el conjunto cuyo número de elementos queremos averiguar y el conjunto de los números naturales $1, 2, \text{etc.}, n$, ya podemos tener algún atajo, de estos que señalaba antes, para encontrar el número de elementos de ese conjunto. ¿Y en cuanto al segundo método? Bien, estábamos comentando que tenemos un par de métodos. Entonces, el segundo método es lo que se puede enunciar

como la regla de la multiplicación.

Es decir, vamos a poner previamente un ejemplo. Supongamos que queremos averiguar cuántas palabras distintas, con sentidos o no, se pueden formar con las letras a, e, m y s. Entonces, bueno, con alguna regla más. Por ejemplo, que tengan todas cuatro letras, que ninguna esté repetida y que la primera sea vocal.

Entonces, esto hay que razonar con cierta habilidad. Si la primera es el vocal, tiene que ser una a o una e. Por lo tanto, tenemos dos posibilidades. Una vez que fijamos una de esas dos, o bien la a o bien la e, para la segunda letra, pues para la segunda letra podemos elegir una de las tres que nos faltan.

Si hemos fijado la a, pues puede ser la e, la m o la s, y si hemos fijado la e, pues puede ser la a, la m o la s. Entonces, para la segunda letra, el segundo hueco, por decirlo así, tendremos tres posibilidades. Para la tercera letra, como ya hemos gastado dos, solo nos quedan dos letras y tendremos dos posibilidades. Y para la cuarta letra, como ya solo nos queda una, pues cae en su sitio y ya solo tenemos una posibilidad.

Entonces, la respuesta que tenemos que dar a esa pregunta, ¿cuántas palabras con sentido o sin sentido se pueden formar con las cuatro letras de manera que no se repita ninguna y la primera sea vocal? Pues hacemos la cuenta de ir multiplicando dos por tres por dos por uno. Eso lo he enunciado en la regla de multiplicación. Y con esta regla es muy útil y muy general en cierta medida.

Simplemente es ir poniendo objetos en casillas, en lugares que dejamos vacíos, con las restricciones y las condiciones que nos pongan. Si nos ponen, lo inteligente es ir rellenando aquellas casillas, aquellos huecos que tengan más restricciones. Por ejemplo, si nos dicen, la tercera letra tiene que ser vocal, pues empezamos por ahí, empezamos por el tercer hueco, porque es la que más nos va a condicionar.

Y luego vamos rellenando los huecos y multiplicando. Con esta regla multiplicativa es tan general que casi muchos de los casos se pueden reducir a esto. Y con un razonamiento relativamente hábil se puede encontrar la solución de numerosos problemas de combinatoria.

Bien, con esto yo creo que acabamos ya estas dos lecciones que hemos visto esta noche. Propositiones y combinatoria. Bueno, hay que recordar al alumno que debe repasárselo bien, ya va quedando cada vez menos tiempo, tenemos la semana a semana.

Déjame insistirles en que no se olviden de estudiar los tres modelos clásicos que estábamos comentando hace un momentito, que son las relativamente famosas la palabra de permutaciones, variaciones y combinaciones, que son, en definitiva, especializaciones o casos particulares de esta regla multiplicativa que estábamos acabando de enunciar. Pero aunque ya se nos eche el tiempo encima y no tenemos ocasión de detenernos en ello, sí quiero que no vayan por ello a dejarlos de lado y estudiarlo con detenimiento, porque por otra parte son

conceptos y técnicas de matemáticas bastante útiles en la vida cotidiana. Al fin y al cabo, todos queremos presumir de saber cuántas quinienas podemos hacer o cómo calcular todo eso y esperamos que al acabar esta lección los alumnos sean capaces de resolver por sí mismos estos problemas.

Bueno, pues esperamos que durante esta semana lo pasen muy bien, también descansen y, de paso, si tienen algún rato libre, pues también estudien un poco matemáticas. De todas formas, en las vacaciones conviene también darse un descansillo que los merecemos todos y venir ya con nuevos brillos para la última parte del curso que ya se están acercando las fechas en que hay que revivir cuentas. Pues despedimos el curso de acceso, será hasta el lunes después de Semana Santa.

Muchas gracias por su compañía, muchas gracias Eduardo Ramal. Buenas noches y hasta el próximo programa. Despedimos la programación de la UNED hasta el próximo lunes 31 de marzo.

Hasta entonces, que pasen una feliz Semana Santa.