

AC 15 22

Matemáticas especiales. Guión número 21. Repaso del concepto de número.

Autores Abejer Monteagudo Joaquín y otros. Emisión 26 del 3 de 1980. En emisiones anteriores hemos ido estudiando los fundamentos teóricos de los conceptos de números.

En este sentido vimos las definiciones del número natural, del número entero, del número racional, del número real y del número complejo. Hoy no trataremos de aquellos estudios pormenorizados de definiciones y propiedades de los diversos conjuntos de números. Más bien intentaremos dar una visión general del número y de su importancia en las matemáticas, al menos al nivel elemental en que el problema del número es tratado en nuestra asignatura.

No obstante, a lo largo de nuestra exposición hemos de tener muy en cuenta cada concepto particular de número y distinguir muy claramente las propiedades que tiene un conjunto de números pero que no poseen otro conjunto. Por ejemplo, es de gran importancia hebraica el hecho de que todo número racional tiene inverso respecto al producto, mientras que los números enteros por lo general no poseen inverso. Empezaremos pues por estudiar comparativamente las propiedades de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos.

Antes es necesario recordar que los números tienen fundamentalmente dos bloques de propiedades, propiedades algebraicas y propiedades de orden. Todas las propiedades de las leyes de composición interna, suma y producto, son propiedades algebraicas. También son propiedades algebraicas las que se refieren a la capacidad de determinados números para ser soluciones de diversas ecuaciones algebraicas.

Directa o indirectamente, las propiedades algebraicas de los números están en relación con las leyes de composición interna, suma y producto. En el conjunto de los números naturales, es decir, el conjunto cuyos elementos son el cero, el uno, el dos, el tres, etcétera, se definen la suma y el producto. Ambas leyes de composición interna son asociativas y conmutativas, y el producto es distributivo respecto a la suma.

En el conjunto de los números naturales, por tanto, los números pueden sumarse y multiplicarse según las reglas elementales que todos conocemos. El procedimiento por el cual sumamos más de dos números, o multiplicamos más de dos números, se basa en las propiedades asociativas de la suma y el producto, respectivamente. La propiedad distributiva del producto respecto a la suma permite las operaciones que comúnmente se denominan sacar factor común y quitar paréntesis.

Sin embargo, aunque el modo de operar numéricamente está asegurado en el conjunto de los números naturales, esta estructura de números no da respuesta a problemas algebraicos muy elementales. Consideremos, por ejemplo, la ecuación $x + 2 = 0$. La solución a la ecuación $x + 2 = 0$ debe ser un número que, sumado a dos, nos permita obtener el

número cero.

Por supuesto que por ahora buscamos esta solución en el conjunto de los números naturales. Desde luego, no existe solución para esta ecuación. Es decir, no existe ningún número natural al que, sumando el dos, obtengamos como resultado el cero.

La ecuación $x + 2$ igual a cero se queda sin solución dentro de la estructura de los números naturales. En este momento se nos plantea una cuestión. ¿Por qué ecuaciones de esta forma no tienen soluciones naturales? O planteándola de una manera algo diferente.

¿Qué propiedad han de tener los números para que toda ecuación de este tipo tenga solución? Hemos de fijarnos en que el cero es el elemento neutro de la suma de números naturales. Si como en nuestro ejemplo $x + 2$ ha de ser cero, es evidente que x ha de ser el elemento simétrico de dos respecto a la suma. Podemos concluir entonces diciendo que para que una ecuación de este tipo tenga solución es necesario y suficiente que la suma tenga la propiedad de existencia del elemento simétrico.

Y es evidente que para los números naturales no se cumple esta propiedad. Es ahora cuando aparece la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales. Se hace necesario una nueva estructura de números para los cuales exista el elemento simétrico respecto a la suma y que además conserve todas las propiedades que tenían los números naturales.

Este conjunto de números ha de ser pues un anillo. La primera ampliación de la estructura del número natural nos conduce al anillo de los números enteros. Con ella ampliamos el campo de las posibilidades algebraicas de los números.

La ampliación del número natural al número entero no cubre sin embargo, como todos nuestros alumnos habrán notado ya, nuestras necesidades algebraicas. En efecto, no existe ningún número entero que sea solución de ecuaciones del tipo $2x$ igual a 1. Es evidente, para que la ecuación $2x$ igual a 1 tuviese solución en el conjunto de los números enteros sería necesario que existiera un número entero cuyo producto por 2 fuera el número 1. Es fácil demostrar que tal entero no existe. Además, como el 1 es el elemento neutro del producto de números enteros y $2x$ es igual a 1, necesariamente la solución de esta ecuación ha de ser el elemento simétrico de 2 respecto al producto de números.

La propiedad algebraica de que carecen los números enteros para resolver esta ecuación es pues la propiedad de existencia del elemento simétrico inverso para todo número natural. De nuevo se hace necesario ampliar el campo de los números. Esta ampliación, como la que hicimos anteriormente, debe de conservar todas las propiedades de los números enteros y, en este caso, todo número debe tener simétrico respecto al producto.

Los números enteros forman un anillo con elemento unidad. Al ampliar el conjunto de los números enteros al conjunto de los números irracionales, introducimos precisamente la propiedad de existencia del elemento simétrico respecto al producto. Por esa razón, el número

irracional tiene estructura de cuerpo.

Al considerar el cuerpo de los números racionales puede parecer a primera vista que ya están cubiertas todas nuestras necesidades algebraicas. Bastaría para ello pensar que un cuerpo cumple todas las propiedades fundamentales de la suma y del producto de números. Sin embargo, este modo de razonar sería excesivamente simple.

La estructura de cuerpo que poseen los números racionales no agota todas las propiedades algebraicas de los números. En efecto, se pueden plantear ecuaciones muy sencillas que no tienen soluciones racionales. Veamos un ejemplo clásico.

La ecuación x cuadrado igual a 2. Esta ecuación tan sencilla no tiene solución en el conjunto de los números racionales. Es muy fácil demostrar que no existe ningún número racional que elevado al cuadrado nos dé el número 2. Como es conocido por todos nuestros alumnos, las soluciones de la ecuación x cuadrado igual a 2 son los números raíz de 2 y menos raíz de 2. El número raíz de 2 no es un número racional. Se trata, pues, de un número irracional.

La nueva ampliación que vamos a realizar sobre el número racional ha de contener, pues, a los números irracionales. Sin embargo, la ampliación del número racional al número real tiene características diferentes a las de las anteriores ampliaciones del campo de los números. En este caso, no introducimos ninguna propiedad nueva para la suma y producto de números reales.

Es decir, el número real posee, igual que el número racional, estructura de cuerpo. Otra de las características nuevas de esta ampliación es que introducimos números irracionales que no son raíces de números racionales como lo es raíz de 2. Es el caso del número π . No podemos entrar ahora, por cuestión de tiempo, en la necesidad de introducir estos números irracionales.

Sólo señalaremos que la necesidad de introducir estos números está en relación con la estructura de orden de los números. Antes de despedirnos, es conveniente decir unas palabras sobre los números complejos. Todos nuestros alumnos saben que las ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales no siempre tienen soluciones reales.

Mientras que siempre tienen solución en el cuerpo de los números complejos. Pues bien, toda ecuación polinómica, ya sea de segundo grado o de cualquier grado, tiene siempre solución en el conjunto de los números complejos. Este es un resultado verdaderamente sorprendente.

Los números complejos son suficientes para resolver cualquier ecuación algebraica. Tienen, además, todas las propiedades algebraicas de los números reales. Puesto que el número complejo agota todas las necesidades algebraicas de los números, desde el punto de vista algebraico, ya no es necesario hacer ninguna nueva ampliación del número.

Esta es la situación actual del problema del número. Se considera que ya no serán necesarios nuevos números para resolver los distintos problemas matemáticos. Y no sólo los problemas algebraicos.

