

... Matemáticas básicas, guión número 39. Concepto de número. Contenido didáctico, José Marco Franco. ... En esta emisión nos proponemos dar una visión general de todos los números que se emplean en las matemáticas, distinguiendo unos de otros y estudiando las estructuras.

estructuras que forman. Empecemos con los números naturales y para distinguir cuáles son podríamos decir que dichos números son los que nos sirven para contar objetos. Como comprenderán esto no es una definición matemática pero creemos que les ayuda a distinguir los números naturales de otros que no lo son. Así por ejemplo números naturales serán el 0, 1, 2, 3 y no serán menos 2, un tercio, dos cuartos, raíz de 5 ya que estos no nos sirven para contar objetos. Veamos ahora cómo podríamos dar una idea más matemática de los números naturales. Podríamos identificar los números naturales a los cardinales de los conjuntos finitos entendiendo por cardinal de un conjunto el número de elementos que tiene dicho conjunto. Esto nos da una regla para saber si un número es natural o no. ¿Cómo? Cuando nos den un número veremos si existe un conjunto.

cuyo número de elementos sea igual al número que nos den. Si tal conjunto existe, dicho número será natural y en caso contrario no lo será. Así, por ejemplo, 3 es un número natural. La respuesta es sí, ya que podemos encontrar un conjunto A igual E I O cuyo cardinal es 3. Menos 2 no es un número natural, ya que no encontramos un conjunto cuyo cardinal sea menos 2. Un tercio tampoco es un número natural por la misma razón. Esto nos da un criterio para averiguar qué números son naturales y cuáles no lo son. Algunos de ustedes nos han planteado la duda de si el número 0 es natural o no. Fíjense en que, con el criterio dado, para que 0 sea natural, tiene que existir un conjunto cuyo cardinal será 0. Y dicho conjunto sí existe, y es el conjunto vacío. Por tanto, el 0 es natural.

sí que será un número natural. Todos ustedes saben operar con números naturales, pero quizás tengan alguna dificultad en averiguar la estructura que tienen. Por ello vamos a estudiar con detalle la estructura que forman. Antes de empezar, le llamaremos al conjunto de los números naturales N mayúscula y vamos a estudiar con la operación suma qué estructura tiene. Recuerden que lo primero que hay que ver es si la suma es una ley de composición interna sobre los naturales. La respuesta es afirmativa, ya que si sumamos dos números naturales siempre el resultado es otro número natural. No hay ninguna dificultad en comprender que tiene la propiedad conmutativa y la asociativa. Por tanto, vamos a ver si tienen elemento neutro y simétrico. Para ver si tienen elemento neutro, hemos de encontrar un número que sumado con otro cualquiera me dé este número. Dicho número es el cero y como pertenece al conjunto de los naturales, el cero es el número que suma con el número natural. Si sumamos dos números naturales, el cero será el elemento neutro.

Por ello, sí que tiene elemento neutro el conjunto. Estudiemos si tiene elemento simétrico. Para ello, tomemos un número, por ejemplo, el 2, y busquemos un número que sumado con él me dé el elemento neutro, que es el 0. Este número será el menos 2. Luego el simétrico de 2 será menos 2. Ahora bien, menos 2 no pertenece al conjunto de los números naturales. Por tanto, 2 no tiene simétrico. Si resumimos, resulta que el conjunto de los números naturales con la suma tiene las propiedades asociativa, conmutativa y elemento neutro. Y por tanto, su estructura será de semigrupo conmutativo y con unidad. Veamos ahora lo mismo pero con la multiplicación. Empezamos viendo qué es una ley de composición interna, ya que el multiplicar dos números naturales siempre me da un número natural. No hay ninguna dificultad en comprobar que tienen la propiedad

conmutativa y asociativa.

y vamos a ver si tienen elemento neutro y simétrico. Elemento neutro sí tiene, y será el 1, ya que dicho número multiplicado por cualquier otro número natural me da este número, y además el 1 es un número natural. Elemento simétrico. Tomemos un número cualquiera, por ejemplo el 2, y busquemos un número que multiplicado por él nos dé el elemento neutro, que es 1. Dicho número será un medio, ya que si multiplicamos el número 2 por el número 1 medio, nos da 1, que es el elemento neutro. Ahora bien, como un medio no es un número natural, la conclusión es que el conjunto de los números naturales no tiene simétrico. Por tanto, la estructura de los números naturales con la multiplicación es un semigrupo conmutativo y con elemento neutro. ¿Qué es lo que se puede hacer con un número natural? ¿Qué es lo que se puede hacer con un número natural?

Vamos ahora a ver si podemos efectuar todas las operaciones con números naturales. Vemos que siempre podemos efectuar la suma. La resta no siempre la podemos efectuar, ya que sí podremos restar 5 menos 3, pero no 3 menos 5. Por tanto, será necesario ampliar el concepto de los números naturales y definir otros números. Este va a ser nuestro paso siguiente. Partiendo de los números naturales que ya conocemos, vamos a definir los números enteros. El procedimiento que se emplea para las sucesivas aplicaciones es siempre el mismo. Sobre un conjunto se define una relación, se comprueba que es de equivalencia y, como recordarán, se dividirá el conjunto en clases. Cada una de estas clases definirá un número y el conjunto cociente será los nuevos números que nos habíamos propuesto definir. Bien, pues vamos a seguir este procedimiento. Y definiremos los números enteros. Para ello, sobre el conjunto...

n por n , definimos la relación a minúscula b minúscula, relacionado con c minúscula d minúscula, si se verifica que a más d igual b más c . Se comprueba de esta relación que es de equivalencia, y por tanto el conjunto n mayúscula por n mayúscula queda dividido en clases. Cada una de estas clases definirá un número entero, y el conjunto cociente será el conjunto de los números enteros. Quizás muchos de ustedes estarán pensando que esto no concuerda con la idea que tienen del número entero, ya que para ustedes números enteros son los naturales y los negativos, y ahora acabamos de definir los números enteros como una clase de equivalencia formada por pares de números naturales. Vamos a ver esto más detalladamente para que esté claro. Consideraremos un par de clases de equivalencia. Primera clase. Estará formada por infinitos pares de números naturales. Primera clase. Estará formada por infinitos pares de números naturales. Primera clase. Estará formada por infinitos pares de números naturales.

y estos pares tienen que estar todos relacionados con la relación de equivalencia dada. Y así pares relacionados serán 2, 1 relacionado 3, 2 relacionado 4, 3 relacionado con el 5, 4 y así infinitos pares. Si observamos estos pares relacionados veremos que si restamos la primera componente de la segunda siempre nos da el mismo número y así si vamos restando 2 menos 1, 3 menos 2, 4 menos 3, 5 menos 4 siempre nos da 1. Por lo tanto la clase de equivalencia que estamos estudiando define el número entero 1. Segunda clase. Los pares 2, 4 están relacionados con 3, 5, con 4, 6 y así sucesivamente. Si restamos la primera componente de la segunda nos da el mismo número y así sucesivamente.

este caso, menos 2. Por tanto, la clase de equivalencia formada por los pares

anteriores definen el número entero menos 2. Así, cuando nos den una clase de equivalencia y queramos saber qué número entero define, no tenemos más que restar la primera componente de la segunda. Todos los pares que estén relacionados cumplirán la condición de que esta diferencia es el mismo número y este será el número entero que defina la clase. Vamos a estudiar ahora la estructura que tienen los números enteros que representaremos por $\mathbb{Z}$. Consideremos la operación suma, por supuesto que es una ley de composición interna, ya que si sumo dos números enteros siempre nos dará un número entero. No tenemos ninguna dificultad en comprobar que cumple las propiedades conmutativa y asociativa. También posee elemento neutro que será la clase formada por los pares .

$1, 1, 2, 2$ y que representan el 0 . Cada elemento tiene simétrico y así el simétrico del 2 , que está representado por la clase $2, 0, 3, 1$, será el menos 2 , que está representado por la clase $0, 2, 1, 3$. Como el menos 2 es un número entero, resulta que tiene simétrico. Por tanto, el conjunto de los números enteros con la suma tiene estructura de grupo conmutativo. Estudiemos ahora el conjunto de los números enteros con la multiplicación. Por supuesto que es una ley de composición interna, ya que al multiplicar dos números enteros nos da otro entero. No hay ninguna dificultad en comprobar que goza de la propiedad asociativa y conmutativa. También posee elemento neutro, que es la clase $1, 2, 1$, que representa el número de números enteros. Y aquí nos da el entero 1 .

que el número que operado con 2 nos da el elemento neutro 1 es el 1 medio, que no es entero. Por tanto, el conjunto de los números enteros con la multiplicación tiene estructura de semigrupo conmutativo y con elemento neutro. Observemos que respecto de la suma y la multiplicación es distributiva. Una estructura como ésta recibe el nombre de anillo conmutativo. Es decir, respecto de la suma es grupo conmutativo y respecto de la multiplicación semigrupo y además posee la propiedad distributiva. Una vez visto esto, vamos a ver si con los números enteros podemos hacer todas las operaciones. Podremos hacer sumas, restas y multiplicaciones, pero no divisiones, ya que 3 dividido entre 5 no nos da un número entero. Por ello necesitamos ampliar el campo de los números enteros y definiremos los números enteros.

números racionales. El procedimiento es el mismo sobre el conjunto $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}$. Defino la siguiente relación. AB relacionado con CD , si A es AD como B es AC . Esto se comprueba que es de equivalencia. Por tanto, dividirá el conjunto en clases. Cada clase define un número racional y el conjunto cociente es lo que llamaremos número racional. Igual que hacíamos con los números enteros, vamos a hacer con estos y averiguaremos cuando tenga una clase de equivalencia cómo sabemos qué número racional define. Pongamos dos ejemplos de clases de equivalencia. Sea la clase formada por los pares $2, 1, 4, 2, 6, 3, 8, 4$. Para saber qué número racional define, debemos definir el conjunto de los números que se definen. Para saber qué número definen, consideramos la primera componente como el numerador de una fracción.

y la segunda como el denominador. Entonces la clase define el número racional 2 partido por 1 , que es 2 . Sea otra clase formada por los pares $1, 2, 2, 4, 3, 6, 4, 8$. Esta clase define el número racional 1 medio. Comprobamos entonces que los números racionales están formados por los enteros y las fracciones. Pasemos ahora a estudiar la estructura que tienen los números racionales con la suma. No tendrán ninguna dificultad en comprobar que es un grupo conmutativo. Vamos a considerar ahora la estructura con la multiplicación. Es asociativa,

conmutativa. Tiene elemento neutro que es el 1. Observemos ahora qué pasa con el simétrico. Y así el simétrico del 2 será un medio, el de 3 será un tercio. Ahora bien, ¿cuál será el simétrico de 0?

debería ser 1 partido por 0 que no está definido. Por tanto, no tiene simétrico el 0 y no lo podemos denominar grupo, pues para que lo sea, es preciso que todo elemento tenga simétrico, y esto no ocurre aquí. Por tanto, la estructura del conjunto de los números racionales con el producto es un semigrupo con elemento neutro y simétrico. Ahora bien, si consideramos las dos operaciones juntas y consideramos que respecto de la suma es un grupo conmutativo, que respecto de la multiplicación, si excluimos el elemento neutro de la suma, es un grupo y que tiene la propiedad distributiva, esta estructura matemática tiene el nombre de cuerpo. Con estos números racionales podemos ya efectuar todo, sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Ahora bien, aún es preciso ampliar más el campo, ya que con los racionales no se pueden efectuar raíces, y así 2 no es racional.

Pero esto se sale ya del temario y queda para los complementos de matemáticas. Gracias por ver el video.