

AC 15 13

Matemáticas especiales, guión número 17. Dependencia e independencia lineal. Autores, Joaquín Abejer y otros.

Vamos a continuar hoy con el tema de los espacios vectoriales, estudiando un concepto que tiene una importancia fundamental en estos. Hablaremos de la dependencia e independencia lineal. Antes de comenzar con el tema de hoy, creo, si a usted le parece bien, que podíamos repasar el concepto de espacio vectorial.

Es una idea estupenda. Si además pudiera aclararnos más las ideas del día anterior, entenderíamos mejor el contenido de la emisión de hoy. Bien, podemos empezar volviendo a repasar el concepto de espacio vectorial.

Pero tengan ustedes en cuenta que estas emisiones no pueden suplir la labor que realizan los profesores tutores, ni la labor personal del alumno con su libro de texto, ya que, fundamentalmente, el lenguaje matemático es lenguaje escrito, y la explicación y retención de las ideas y su aclaración con ejemplos es una tarea que se realiza principalmente con la visualización. No obstante, la comunicación oral que realizamos en estos programas radiofónicos puede cumplir objetivos tales como comunicar a nuestros alumnos los detalles esenciales de algunos temas de nuestra asignatura que se escapan en la lectura de los textos, así como la aclaración de conceptos e ideas del lenguaje matemático en que ustedes suelen encontrar las mayores dificultades. Dicho esto, me interesaría que ustedes mismos me concretaran más las dificultades que han encontrado para entender lo que es un espacio vectorial según avanzamos en el repaso.

Bueno, me atrevo a comenzar. Entiendo que un espacio vectorial sobre un cuerpo K es un conjunto V con la estructura de grupo abeliano, y tal que se define una ley de composición externa de K por V en V que cumple estas cuatro propiedades. Yo ya he leído en el libro cuáles son estas propiedades, me resultan bastante familiares.

¿Podría usted explicarnos un poco en qué se diferencian de las propiedades vistas para los anillos y cuerpos? Bien, vamos a suponer que la mayoría de los alumnos son tan aplicados como usted y también las han leído. Entonces voy a enunciarlas. Primera, propiedad distributiva del producto externo respecto a la suma de vectores.

Segunda, propiedad distributiva del producto externo respecto a la suma de escalares. Tercera, asociativa del producto exterior respecto al producto de escalares. Y cuarta, el elemento neutro del cuerpo respecto al producto, es decir, el elemento unidad del cuerpo, al multiplicarlo exteriormente por cualquier vector, nos da el mismo vector.

¿Les parece a ustedes que las comentemos? Sí. Comenzaré yo con las dos primeras. Le veo a usted muy lanzado.

Que conste que me parece muy bien, ¿eh? Adelante. Las dos primeras propiedades, es decir, las distributivas, ¿son exactamente las mismas que veíamos en las estructuras de anillo y cuerpo? No exactamente, aunque formalmente son muy parecidas. Hay que tener en cuenta que, por ejemplo, en la propiedad distributiva del producto externo respecto a la suma de vectores, interviene un escalar cualquiera del cuerpo K y dos vectores, cualesquiera también, del espacio vectorial V . Ah, pues entonces en la segunda distributiva intervendrán dos escalares y un vector.

De acuerdo. Siempre que recalquemos que es distributiva del producto exterior respecto de la suma de escalares. Y además quiero resaltar otro defecto que ha tenido en su intervención y que es muy común en muchos alumnos.

Cuando enunciamos una propiedad algebraica como esta, hay que especificar que se cumple para cualquier elemento del conjunto o conjuntos a que se refiera. Desde el punto de vista práctico, estas dos propiedades sirven para quitar paréntesis o sacar factor común. Por supuesto.

Es usted muy observadora. Efectivamente, siempre que tengamos un paréntesis con suma de vectores multiplicados por un escalar o un paréntesis con suma de escalares multiplicados por un vector, podremos quitar estos paréntesis utilizando la regla algebraica habitual. Fíjense que sólo podemos operar de esta manera porque la misma definición de espacio vectorial nos autoriza a ello.

Lo mismo podemos decir de la operación de sacar factor común. Y además, el factor común puede sacar o bien un escalar o un vector. Por lo que usted ha dicho, entiendo que la tercera propiedad, es decir, la asociativa del producto externo respecto al producto de escalares, tiene una utilidad parecida a la hora de operar.

Lo que se ha dicho me ha aclarado bastante la necesidad de las tres primeras propiedades. Pero el significado y la utilidad de la cuarta se me escapa. Comprendo la dificultad que tiene usted.

Esta propiedad es seguramente la más abstracta. Voy a intentar explicar intuitivamente su significado. Observen que en la definición de espacio vectorial V interviene un cuerpo K . Por tanto, respecto al producto en K , existe un elemento unidad y cualquier escalar de K tiene su elemento inverso.

Ahora bien, como además componemos escalares del cuerpo con vectores de V , parece adecuado que en este producto externo se reflejen también las propiedades del cuerpo K . La forma más natural de que esto ocurra es la de que al hacer el producto externo del elemento unidad con cualquier vector de V , nos dé el mismo vector. No muy rigurosamente dicho, sería decir que el elemento unidad respecto al producto en K es también elemento unidad del producto externo. La explicación de las cuatro propiedades me ha resultado sugestiva.

Posiblemente lo que nos haga falta ahora sea reflexionar un poco sobre todo esto. Esta reflexión le será de mucha utilidad. Según vayamos avanzando en el tema y apliquemos estos conceptos, comprenderán mejor la definición de espacio vectorial.

Pasemos ahora a estudiar unas relaciones muy importantes que pueden tener entre sí los vectores de un espacio vectorial V sobre un cuerpo K . Para entendernos mejor, llamaremos sistema de vectores a cualquier conjunto de vectores de V . Empecemos con una definición muy sencilla pero fundamental. Llamamos combinación lineal de un sistema de vectores al vector que se obtiene sumando el resultado de multiplicar mediante el producto externo cada vector del sistema por un escalar. Profesor, perdón, voy a repetirlo para que quede más claro.

Llamamos combinación lineal de un sistema de vectores al vector que se obtiene sumando el resultado de multiplicar mediante el producto externo cada vector del sistema por un escalar. Dígame. Profesor, quisiera que usted pusiera un ejemplo a partir de un caso de espacio vectorial que he leído en mi libro.

Es un espacio vectorial V en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ donde V es el conjunto de las aplicaciones numéricas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Bueno, pero antes tiene usted que definirme la suma de esos vectores y el producto externo. Claro, intentaré hacerlo.

Dadas dos aplicaciones pertenecientes a V la imagen de la aplicación suma es la suma de las imágenes. Y dado un número real y una aplicación de V la imagen de la aplicación producto es el producto del número real por la imagen de la aplicación dada. Vamos a convenir que se cumplen todas las propiedades necesarias para que sea un espacio vectorial.

Entonces, en este caso, ¿se llaman vectores a estas aplicaciones? Sí, siempre que puntualicemos que se trata de un espacio vectorial de este conjunto de aplicaciones sobre $\mathbb{R}$ y estemos pensando en la suma de vectores y producto externo que su compañero nos ha definido. Aclarado esto, pasemos a poner un ejemplo de combinación lineal. Consideremos un sistema formado por dos vectores de este espacio vectorial.

El primero será la aplicación tal que a cada número real X le hace corresponder el mismo X . Para entendernos, la llamaremos aplicación X . El segundo vector será la aplicación que a cada número real X le hace corresponder X elevado al cuadrado. La llamaremos aplicación X al cuadrado. Entonces, una combinación lineal de este sistema será, por ejemplo, la aplicación que resulta de sumar la aplicación X multiplicada por 2 y la aplicación X al cuadrado multiplicada por 5. Con lo cual, resultará la aplicación que a cada número real X le hace corresponder $2X$ más $5X$ al cuadrado.

Es decir, esta última aplicación es una combinación lineal del sistema de vectores de partida. Entonces, dado un sistema de vectores, podrá haber muchas combinaciones lineales, ¿no? En efecto. Si en vez de elegir para nuestros dos vectores los números reales 2 y 5, hubiéramos escogido otros dos números, obtendríamos otra combinación lineal.

Quiero que vean ahora una definición que se relaciona con la anterior. Decimos que un vector depende linealmente de un sistema de vectores si dicho vector se puede expresar como combinación lineal del sistema. ¿Y cómo se comprueba que un vector depende linealmente de un sistema de vectores? Me parece que es difícil encontrar los elementos del cuerpo por los que hemos de multiplicar los vectores del sistema para que al sumar obtengamos el vector en cuestión.

El problema que usted apunta no lo podemos resolver por ahora. Es la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales la que nos ayudará a dar una respuesta práctica a esta cuestión. De momento, retendremos la definición y espero que las ideas y propiedades que vamos a continuar exponiendo aclaren un poco más la idea de dependencia lineal.

Veamos ahora qué entendemos por sistema de vectores ligado. Un sistema de vectores es ligado si al menos uno de los vectores del sistema depende linealmente de los restantes. Según esta definición, ahora resulta todavía más difícil que antes saber cuándo un sistema de vectores es ligado ya que hemos de ir comprobando con cada vector si depende linealmente o no de los demás.

Ahora sí que puedo resolver su problema. Voy a dar una propiedad que no demostraremos que nos puede servir de criterio para saber cuándo un sistema de vectores es ligado o no. Esta propiedad fundamental dice un sistema de vectores es ligado solamente cuando existe una combinación lineal de los vectores del sistema que es igual al vector cero y al menos uno de los escalares es distinto de cero.

Según esta propiedad, el problema de saber cuándo un sistema de vectores es ligado se reduce a saber si ese sistema de vectores tiene una combinación lineal que es igual al vector cero. No, porque es imprescindible que en esa combinación lineal intervenga por lo menos un escalar distinto de cero. Si olvidamos este detalle, observen que todo sistema de vectores, ligado o no, tiene una combinación lineal que es igual al vector cero, precisamente aquella que se obtiene multiplicando todos los vectores por el escalar cero del cuerpo.

Y ahora una recomendación. Vamos a terminar, pero los alumnos pueden estudiar por su cuenta el concepto de sistema de vectores libre. Nada más.

En la próxima emisión seguiremos trabajando con estos importantísimos conceptos.