

AC 15 7

En la emisión de hoy trataremos de explicar un tema de gran importancia que utilizaremos en las próximas emisiones. Es el de las estructuras algebraicas. Como en días anteriores, antes de centrarnos en el tema de hoy, vamos a repasar algunos conceptos que necesitaremos a posteriori.

Recuerdan ustedes qué era una ley de composición interna. Me parece que sí. Dado un conjunto A , una ley de composición interna en A es una aplicación del conjunto producto A por A en el mismo conjunto A . Esto lo que quiere decir es que, cuando operamos dos elementos del conjunto A mediante la ley de composición interna, siempre obtenemos otro elemento del mismo conjunto, ¿no es cierto? Efectivamente.

¿Se acuerdan ahora de algún ejemplo de ley de composición interna? Sí. Veíamos que, en el conjunto de los números naturales, la operación suma era una ley de composición interna, ya que siempre que sumemos dos números naturales obtenemos otro número natural. Bien.

Más adelante estudiaremos qué estructura algebraica tiene el conjunto de los números naturales con la operación suma. Antes vamos a recordar algunas propiedades que puede verificar una ley de composición interna definida en un conjunto. Según las propiedades que cumpla dicha ley de composición interna, diremos que el conjunto en el que está definida la ley, junto con esta, posee una estructura algebraica u otra.

Me parece que cuando estudiamos las leyes de composición interna veíamos algunas propiedades que podían verificar. Sí, las tratamos en emisiones anteriores. Ahora vamos a repasarlas.

Supongamos que tenemos un conjunto A y una ley de composición interna definida en él. ¿Podrían decirme cuándo dicha ley interna es conmutativa? Será conmutativa cuando se verifique que al operar dos elementos cualesquiera, X e Y del conjunto A , se obtenga el mismo resultado si operamos X con Y que si operamos Y con X . Creo que la propiedad conmutativa lo que indica en realidad es que el orden en que operemos los elementos no interviene en el resultado obtenido. ¿No es así? Efectivamente, ambos tienen razón.

Decimos que una ley de composición interna definida en un conjunto A es conmutativa cuando para cada par de elementos X e Y del conjunto A se verifica que X operado con Y es igual a Y operado con X . Fíjense que esta condición se tiene que cumplir para cualquier par de elementos del conjunto A . Si existe al menos un par de elementos que no lo cumple, entonces diremos que la ley no es conmutativa. Se me ocurre que en el conjunto de los números naturales la suma como ley de composición interna es conmutativa, ya que al sumar dos números naturales cualesquiera, por ejemplo 4 y 2, obtenemos el mismo resultado independientemente del orden en que los sumemos. Así, 4 más 2 es igual a 2 más 4. Es fácil ver que una ley de composición interna es conmutativa.

Lo que no veo nada fácil es encontrar una ley interna que no sea conmutativa. ¿Puede ponernos un ejemplo? Por supuesto. Consideremos un conjunto A y la ley de composición interna en A definida de la siguiente manera.

Para dos elementos cualesquiera, X e Y , del conjunto A , X operado con Y es igual a X . Es decir, a cualquier par ordenado de elementos X, Y le hacemos corresponder la primera componente del par. Evidentemente es una ley interna, ya que siempre obtenemos un elemento del conjunto A . Pero, ¿esta ley es conmutativa? Supongo que no, pues si efectuamos X operado con Y resulta el elemento X , y si hacemos Y operado con X resulta el elemento Y . Bien, no es conmutativa porque en general para cualquier par de elementos X e Y resulta que X operado con Y es distinto que Y operado con X . Una vez recordada esta propiedad, pasemos a la propiedad asociativa. ¿Recuerdan cómo se enunciaba? Si tenemos un conjunto A y una ley de composición interna en A , decíamos que dicha ley es asociativa cuando, para tres elementos cualesquiera, X, Y y Z de A , se cumple que si operamos primero Y con Z y después X con el resultado anterior, obtenemos el mismo elemento que si operamos primero X con Y y después el elemento obtenido lo operamos con Z . Entonces, ¿la suma de números naturales es asociativa? Efectivamente.

Vamos a comprobar que si sumamos tres números naturales, por ejemplo 2, 4 y 5, obtenemos el mismo resultado independientemente de la forma en la que los asociemos. Consideremos entonces los números 2, 4 y 5 por este orden y vamos a ver que al sumarlos se verifica la propiedad asociativa. Si sumamos primero 4 y 5, obtenemos 9. Seguidamente sumamos el 2 con el número obtenido, es decir, con el 9, y el resultado final es 11.

Si sumamos ahora en primer lugar 2 y 4, obtenemos el 6. Y a continuación sumaremos dicho número con el 5 que teníamos en tercer lugar, obteniendo finalmente 11. Y observamos que por los dos caminos seguidos hemos llegado al mismo resultado. Esto mismo ocurre para tres números naturales cualesquiera.

Por lo tanto, la suma de números naturales es asociativa. Con estas propiedades que hemos estudiado y que verifica el conjunto de los números naturales, podemos decir que dicho conjunto tiene alguna estructura algebraica. Efectivamente.

Cuando en un conjunto hemos definido una ley de composición interna y verifica la propiedad asociativa, diremos que tiene estructura de semigrupo. Si además verifica la propiedad conmutativa, diremos que es un semigrupo conmutativo o abeliano. Según esto, podemos afirmar que el conjunto de los números naturales con la operación suma es un semigrupo conmutativo.

¿No es así? Sí, sí, es cierto. Pero vamos a seguir viendo algunas propiedades más. Si tenemos un conjunto A y una ley de composición interna en A , diremos que existe elemento neutro cuando se verifica que al operar cualquier elemento x de A con el neutro resulta el mismo elemento x . ¿Sabrían decirme si existe elemento neutro en el conjunto de los números naturales con la operación suma? Tendría que ser un número natural que al sumarle con

cualquier número natural x resulta el mismo número x . Entonces es el cero, ya que al sumar cualquier número natural x con cero resulta el mismo x . Así, por ejemplo, 3 más 0 es igual a 3, 5 más 0 es igual a 5, etc.

Muy bien, muy bien. El cero es el elemento neutro para la suma de números naturales. Pero, ¿recuerdan ahora qué era el elemento simétrico? El elemento simétrico de un elemento x es aquel que al operarle con el primero resulta el elemento neutro.

Entonces, ¿para que exista elemento simétrico, tiene que existir elemento neutro? Efectivamente. Si una ley de composición interna no tiene elemento neutro, no tiene sentido hablar de elemento simétrico. Además, hay que tener en cuenta que cada elemento del conjunto tiene que tener un elemento simétrico.

Si hay un elemento que no lo tiene, diremos que no existe elemento simétrico. ¿Y con estas propiedades, qué estructura algebraica tendrá un conjunto? Un conjunto en el que se ha definido una ley de composición interna y que verifica las propiedades asociativa, elemento neutro y elemento simétrico se dice que es un grupo. Si además verifica la propiedad conmutativa, le llamaremos grupo conmutativo o abeliano.

¿Y en el conjunto de los números naturales existe elemento simétrico? Yo creo que no, pues por ejemplo, el simétrico del número 3 debería ser el menos 3, ya que al sumarlos resulta cero, es decir, el neutro. Pero el número menos 3 no es un número natural. Efectivamente.

En el conjunto de los números naturales no existe elemento simétrico para la suma. Según esto, el conjunto de los números naturales con la suma no tiene estructura de grupo abeliano, aunque sí tiene elemento neutro. ¿No es así? Exacto.

Habíamos dicho que era un semigrupo conmutativo. Y como tiene elemento neutro, diremos que el conjunto de los números naturales con la suma como ley de composición interna es un semigrupo conmutativo con elemento neutro. Bien, con las definiciones de grupo y semigrupo podemos dar por terminada nuestra emisión de hoy.

En nuestra asignatura de Matemáticas Especiales se tratan también otras estructuras algebraicas en las que intervienen dos leyes de composición interna, los anillos y los cuerpos. Confiamos que el estudio que hemos empezado hoy sobre grupos sirva a nuestros alumnos para abordar con más soltura el tema de los anillos y cuerpos.